现代应用数学丛书

泛函分析

〔日〕吉田耕作 著
程其襄 譯
夏道行 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本，是《集合·拓扑·測度》和《广义函数》两书的姐妹作。全书共分14章，扼要闡述了泛函分析的基本內容、半群理論及其在微分方程、积分方程等方面的应用，可供高等学校数学系、物理系师生及工程师、研究人員等参考。

現代应用数学丛书

泛函分析

原书名 位相解析
原著者 〔日〕吉田耕作
原出版者 岩波书店
譯者 程其襄
校者 夏道行

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印張8 14/32 字数200,000
1962年5月第1版 1962年5月第1次印刷
印数 1—3,000

統一书号：13119·459
定价：(十四) [illegible]

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地減少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　录

第1章　賦范空間, Hilbert 空間

古典分析学, 特别是綫性偏微分方程、綫性积分方程等, 由于采用了函数空間内加法算子的观点作統一的处理, 因而收到一定的成果。例如, 如所周知, 量子力学的数学結构便是当作 Hilbert 空間内对称算子的固有值問題而得到定型化的。在本章里, 將談到在以函数为元素的矢量空間内引入了相当于“矢量长”的范数而得到的賦范空間, 以及定义在它上面的加法算子的連續性。由于賦范空間的完备性在理論上的重要意义, 我們也将討論如何在賦范空間内按照极限論法附加“理想元素”而将賦范空間完备化的办法。

§1 賦范空間

矢量空間　以实数 (或复数) 为系数的加法群 X 叫做**矢量空間** (linear space)。也就是說, X 是对于加法 $x+y$ 及乘以实数 (或复数) α 的算法 αx 滿足下列通常矢量算法規則的集:

如果 $x, y\in X$, 那末 $x+y\in X$, $\alpha x\in X$.　　(1.1)

$x+y=y+x$.　　(1.2)

$(x+y)+z=x+(y+z)$.　　(1.3)

对于一切 x, z, 存在一个但也只有一个 y 使得 $x+y=z$.　　(1.4)

$1\cdot x=x$.　　(1.5)

$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.　　(1.6)

$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.　　(1.7)

$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.　　(1.8)

如果把由(1.4)所确定的 y 写作 $z-x$ 的話，那末根据 X 是加法群的事实，显然 $\Theta=x-x$ 不依賴于 x 而被确定，而且对于一切 x 都有 $x+\Theta=x$。于 (1.8) 置 $\alpha=1$, $\beta=-1$ 得 $(0)x=x-x=\Theta$，又于(1.8)置 $\alpha=0$, $\beta=-1$ 得 $(-1)x=\Theta-x$。从而分别将 Θ, $\Theta-x$ 写作 0, $-x$，而且尽管应用計算規則 $x-y=x+(-1)y$ 都不会产生抵触，这是容易明白的。

注　当 αx 中的 α 仅限于实数的情形叫做实矢量空間，α 可以在复数范圍內变动时叫做复矢量空間。

范数　如果对于矢量空間 X 的各元，定义了相当于"矢量 x 的长"的范数 (norm) 使满足以下条件，那末 X 叫做**賦范空間** (normed space)。

$$\|x\|\geqslant 0,\ 且\ \|x\|=0\ 与\ x=0\ 等价。\tag{1.9}$$

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\quad（三角不等式）。\tag{1.10}$$

$$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|。\tag{1.11}$$

例1　$C[\alpha, \beta]$　定义在閉区間 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的全体有界連續实值（或复值）函数 $x(t)$ 按照 $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$，$(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$ 及

$$\|x\|=\sup_{t\in[\alpha,\beta]}|x(t)|\tag{1.12}$$

构成一个賦范空間。但我們說 $x(t)$ 在如象 $[-\infty, 1]$ 这样的无限閉区間上有界連續，是指 $x(t)$ 在 $-\infty<t\leqslant 1$ 連續，并且存在有限的 $\lim\limits_{t\to-\infty}x(t)$。因此属于 $C[\alpha, \beta]$ 的函数 $x(t)$ 皆一致連續，即对于任意的 $\varepsilon>0$ 可定 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当 $t_1, t_2\in[\alpha, \beta]$ 且 $|t_1-t_2|\leqslant\delta$ 时 $|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant\varepsilon$。

同样，在开区間 (α, β) 上有界連續的实值（或复值）函数 $x(t)$ 全体 $C(\alpha, \beta)$ 按照上述的算法及范数也构成一个賦范空間。

例2　$L_2(\alpha, \beta)$　所有定义在开区間 (α, β) 上的实值（或复值）可測函数 $x(t)$，而且 $|x(t)|^2$ 在这区間上是 Lebesgue 式可积的，这些 $x(t)$ 的全体写作 $L_2(\alpha, \beta)$，它按照 $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$，$(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$ 及

$$\|x\|=\left(\int_\alpha^\beta|x(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\tag{1.13}$$

构成一个賦范空間。但在几乎全体的 t 上，函数値都为 0 的 $x(t)$ 当作 0 矢量看，从而对于几乎全体的 t 上函数值都一致的 $x(t)$ 与 $y(t)$ 当作同一矢量看。

証明 連同 x 与 y，$x+y$ 也属于 $L_2(\alpha, \beta)$，这由 $|\gamma+\delta|^2\leqslant 4(|\gamma|^2+|\delta|^2)$ 可以明白。又因 Schwarz 不等式

$$\left|\int_\alpha^\beta x(t)\overline{y(t)}\,dt\right|\leqslant\int_\alpha^\beta |x(t)y(t)|\,dt\leqslant\left(\int_\alpha^\beta |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_\alpha^\beta |y(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.14}$$

成立，得

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\|x\|^2+\int_\alpha^\beta x(t)\bar{y}(t)\,dt+\int_\alpha^\beta y(t)\bar{x}(t)\,dt+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2\leqslant(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

即三角不等式 (1.10) 成立。

例 3 $L_1(\alpha, \beta)$ 所有定义在开区間 (α, β) 的实値（或复値）可测函数 $x(t)$，而且 $|x(t)|$ 在这区間是 Lebesgue 式可积的；这些 $x(t)$ 的全体写作 $L_1(\alpha, \beta)$，它按照 $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$，$(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$ 及

$$\|x\|=\int_\alpha^\beta |x(t)|\,dt \tag{1.15}$$

构成一个賦范空間。但在几乎全体的 t 上，函数値都为 0 的 $x(t)$ 当作 0 矢量看，从而把在几乎全体的 t 上函数値都一致的 $x(t)$ 与 $y(t)$ 当作同一矢量看。

例 4 $\mathfrak{D}^k(R)$ $(k\geqslant 0)$ 設 R 为 m 維歐氏空間 E^m 中的連通域。定义于 R 的 k 次連續可微的实値（或复値）函数 $f(x)=f(x_1, \cdots, x_m)$ 的全体写作 $C^k(R)$。一般而論，对于定义于 R 的函数 $f(x)$，R 的子集 $\{x; f(x)\neq 0\}$ 的閉包❶ (closure) 称为 $f(x)$ 的**支集**或**台** (support, carrier)。在 $C^k(R)$ 中考慮支集是 R 內部的有界閉集的函数記其全体为 $\mathfrak{D}^k(R)$ ❷，它按照 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 及范数

$$\left.\begin{aligned}&\|f\|_k=\left(\sum_{|n|\leqslant k}\int_R |D^{(n)}f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \text{但}\\&dx=dx_1\cdots dx_m,\ D^{(n)}=\partial^{n_1+\cdots+n_m}/\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_m^{n_m},\ |n|=\sum_{i=1}^m n_i\end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

---

❶ 将这集的点列的聚点全部添加于这集而得的。

❷ 設以 R 的点 $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)})$ 为中心，半徑为 $\varepsilon>0$ 的球（連同它的境界）含于 R 內部，匿 $|x|=\left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 时，则函数

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-1/(\varepsilon^2-|x-x^{(0)}|^2)) & \text{当 } |x-x^{(0)}|<\varepsilon\\ 0 & \text{当 } |x-x^{(0)}|\geqslant\varepsilon\end{cases}$$

便属于 $\mathfrak{D}^\infty(R)$。

成一賦范空間 $\mathfrak{D}^k(R)$。

証明 和 $L_2(\alpha, \beta)$ 的情形一样，由于

$$\int_R |D^{(n)}f(x)+D^{(n)}g(x)|^2 dx$$

$$\leqslant\left\{\left(\int_R |D^{(n)}f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_R |D^{(n)}g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

成立，故关于范数的三角不等式也成立。

例5 Dirichlet 式的范数 設 R 为 E^2 的有界域，∂R 为 R 的境界曲綫；又設 $q(x)=q(x_1, x_2)$ 属于 $C^0(R+\partial R)$（即在閉域 $R+\partial R$ 上連續），且到处 >0。設实函数 $f(x)=f(x_1, x_2)$ 在閉域 $R+\partial R$ 上属于 C^1，即具有一阶連續偏导数。这样的函数 $f(x)$ 的全体按照 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 及 Dirichlet 式的范数

$$\|f\|=\left(\int_R (f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+qf^2)dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.17}$$

成一賦范空間。

例6 $A_2(R)$ 設 $f(z)$ 是在 z 平面的域 R 中单值的正则函数，滿足

$$\|f\|=\left(\iint_R |f(z)|^2 dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}<\infty, \quad z=x+\sqrt{-1}\,y, \tag{1.18}$$

这种 $f(z)$ 的全体記为 $A_2(R)$，$A_2(R)$ 按照 $(f+g)(z)=f(z)+g(z)$，$(\alpha f)(z)=\alpha f(z)$ 及范数 (1.18) 成一賦范空間。这可以和 $L_2(\alpha, \beta)$ 的情形同样地看出。

注 只考虑实值函数时，α 限于实数，称为**实賦范空間**。前例5便是这样的例子。考虑复值函数时，α 可在复数范圍变动，称为**复賦范空間**。

将賦范空間作为距离空間 对于賦范空間 X 的任意两点 x, y，如果置

$$\operatorname{dis}(x, y)=\|x-y\|, \tag{1.19}$$

那么它显然满足距离公理：

$$\operatorname{dis}(x, y)\geqslant 0, \text{ 且 } \operatorname{dis}(x, y)=0 \text{ 和 } x=y \text{ 等价}; \tag{1.20}$$

$$\operatorname{dis}(x, y)=\operatorname{dis}(y, x), \tag{1.21}$$

$$\operatorname{dis}(x, z)\leqslant\operatorname{dis}(x, y)+\operatorname{dis}(y, z) \quad (\text{三角不等式})。 \tag{1.22}$$

例如由 (1.10) 得

$$\|x-z\|=\|x-y+y-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|,$$

这便是(1.22)。这样一来,在賦范空間里便可根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\text{dis}(x_n, x)=0$ 导入**收斂概念** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ (簡写作 $x_n\to x$)。

定理 1.1 $\|x\|$ 作为 x 的函数以及 αx 作为 α 与 x 的函数都是連續的,卽

$$\text{若 } x_n\to x,\ \text{则 } \|x_n\|\to\|x\|, \tag{1.23}$$

$$\text{若 } \alpha_n\to\alpha,\ x_n\to x,\ \text{则 } \|\alpha_n x_n\|\to\|\alpha x\|. \tag{1.24}$$

証明 由(1.10)有 $\|x\|\geqslant\|x+y\|-\|y\|$. 于此以 $x-y$ 代 x 得 $\|x-y\|\geqslant\|x\|-\|y\|$, 从而又有 $\|y-x\|\geqslant\|y\|-\|x\|$. 因按 (1.11) $\|x-y\|=\|y-x\|$ 成立,最后得

$$|(\|x\|-\|y\|)|\leqslant\|x-y\|, \tag{1.25}$$

而(1.23)遂明显。

其次 $$\|\alpha x-\alpha_n x_n\|\leqslant\|\alpha x-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha_n x_n\|$$
$$=|\alpha-\alpha_n|\,\|x\|+|\alpha_n|\cdot\|x-x_n\|,$$

右边第一項→0. 由于 $\{|\alpha_n|\}$ 有界,右边第二項也→0.

§2 pre-Hilbert 空間

內积 如果对于矢量空間 X 的任意一对元 x, y, 可定义满足下面四条件的数 (x, y), 则称 (x, y) 为 x 与 y 的內积:

$$(x, x)\geqslant 0 \text{ 且 } x=0 \text{ 与 } (x, x)=0 \text{ 等价}, \tag{2.1}$$

$$(x, y)=\overline{(y, x)}\quad(\text{共軛复数}), \tag{2.2}$$

$$(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y), \tag{2.3}$$

$$(\alpha x, y)=\alpha(x, y). \tag{2.4}$$

由于以上的条件可知下面的关系也成立:

$$(x, y_1+y_2)=(x, y_1)+(x, y_2), \tag{2.2'}$$

$$(x, \alpha y)=\bar{\alpha}(x, y). \tag{2.4'}$$

定理 1.2 $\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$ 满足范数的条件。

証明　首先証明 Schwarz 不等式

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{2.5}$$

因为对于任何实数 λ，它的二次式

$$(x+\lambda(x, y)y, x+\lambda(x, y)y)$$
$$=\|x\|^2+2\lambda|(x, y)|^2+\lambda^2|(x, y)|^2 \cdot \|y\|^2$$

总 $\geqslant 0$，故必判别式

$$|(x, y)|^4-\|x\|^2 \cdot |(x, y)|^2 \cdot \|y\|^2 \leqslant 0,$$

从而当 $|(x, y)| \neq 0$ 时便得(2.5)；又当 $|(x, y)|=0$ 时，(2.5)自始就显然。因此得

$$\|x+y\|^2=(x+y, x+y)=\|x\|^2+(x, y)+(y, x)+\|y\|^2$$
$$\leqslant\|x\|^2+2\|x\| \cdot \|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

注　从上面的証法可以看出，在(2.5)中等号成立的情形限于 x 是 y 的常数(包含0)倍或 y 是 x 的常数(包含0)倍。

pre-Hilbert 空間　一个赋范空間如果它的范数可以从满足(2.1)～(2.4)的內积 (x, y) 通过 $\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$ 而得到，則此空間称为 **pre-Hilbert 空間**[1]。

例1　在 $L_2(\alpha, \beta)$ 中取

$$(x, y)=\int_\alpha^\beta x(t)\overline{y(t)}dt. \tag{2.6}$$

例2　在 $\mathfrak{D}^k(R)$ 中取

$$(f, g)=(f, g)_k=\sum_{|n| \leqslant k} \int_R D^{(n)} f(x) \cdot \overline{D^{(n)} g(x)} dx. \tag{2.7}$$

例3　在 Dirichlet 式范数(1.17)的情形通过內积

$$(f, g)=\int_R\left(f_{x_1} g_{x_1}+f_{x_2} g_{x_2}+q f g\right) dx \tag{2.8}$$

构成实 pre-Hilbert 空間。

例4　在 $A_2(R)$ 中，定义

$$(f, g)=\iint_R f(z) \overline{g(z)} dx\, dy, \quad z=x+iy. \tag{2.9}$$

---

[1] 通常称为內积空間。——校者注

在这里积分的存在性由(1.14)型的 Schwarz 不等式可以看出。

定理 1.3 内积(x, y)为x, y的連續函数。即

$$若\ x_n\to x,\ y_n\to y,\ 則\ \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)=(x, y).$$

証明 由定理 1.1 有$\|x_n\|\to\|x\|$，从而由(2.5)得到

$$\begin{aligned}
&|(x, y)-(x_n, y_n)|\\
&\quad=|(x, y)-(x_n, y)+(x_n, y)-(x_n, y_n)|\\
&\quad=|(x-x_n, y)+(x_n, y-y_n)|\\
&\quad\leqslant\|x-x_n\|\cdot\|y\|+\|x_n\|\cdot\|y-y_n\|,
\end{aligned}$$

其右边$\to 0$ $(n\to\infty)$。

定理 1.4 在 pre-Hilbert 空間中，

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\text{❶}, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}(x, y)=4^{-1}\{&(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)\\
&+\sqrt{-1}(\|x+\sqrt{-1}y\|^2-\|x-\sqrt{-1}y\|^2)\}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

証明 根据(2.2)～(2.4′)

$$\|x+y\|^2=(x+y, x+y)=\|x\|^2+(x, y)+(y, x)+\|y\|^2,$$

$$\|x-y\|^2=(x-y, x-y)=\|x\|^2-(x, y)-(y, x)+\|y\|^2.$$

由此得(2.10)。同样，(2.11)的右边为

$$\begin{aligned}
&2^{-1}\{(x, y)+(y, x)+\sqrt{-1}(x, \sqrt{-1}y)\\
&\qquad+\sqrt{-1}(\sqrt{-1}y, x)\}\\
&\quad=2^{-1}\{(x, y)+(y, x)+(x, y)-(y, x)\}=(x, y).
\end{aligned}$$

§3 加法算子，連續算子

子空間 矢量空間X的子集$\mathfrak{D}$滿足条件：

$$如\ x, y\in\mathfrak{D},\ 則\ \alpha x+\beta y\in\mathfrak{D} \tag{3.1}$$

时，称$\mathfrak{D}$为X的(綫性)**子空間** (linear subspace)。

---

❶ 这关系是賦范空間成为内积空間的充要条件，充分性証見19頁。——譯者注

加法算子　对于 X 的子空間 $\mathfrak{D}$ 的各元素 x，有矢量空間 X_1（也可以与 X 一致）中的元素 $T\cdot x$ 与之对应的（广义的）函数 T 满足条件：

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \tag{3.2}$$

时，称 T 为**加法算子**（additive operator）。这时 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}$，$\mathfrak{W}(T)=\{y;\ y=T\cdot x,\ x\in\mathfrak{D}(T)\}$ 分别称为 T 的**定义域**(domain) 和**值域**(range, Wertvorrat)，特别当 $\mathfrak{W}(T)$ 属于实数体（或复数体）时，T 称为**加法泛函**。

例 1　設 $K(s,t)$ 为定义于 $0\leqslant s\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant 1$ 的連續函数，則通过

$$y(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt \tag{3.3}$$

定义一个加法算子 K，对于 $x(s)\in C[0,1]$，有 $y(t)\in C[0,1]$ 与之对应。

例 2　設 $0\leqslant t_0\leqslant 1$，且对于每个 $x(t)\in C[0,1]$，让 $x(t_0)$ 和它对应，則得一个定义在 $C[0,1]$ 上的加法泛函。

例 3　**坐标算子 $t\cdot$**　对于 $x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$，以 $t\cdot x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$ 与之对应，得到一个加法算子 $t\cdot$，它的定义域 $\mathfrak{D}(t\cdot)$ 是 $L_2(\alpha,\beta)$ 中能使 $t\cdot x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$ 成立的全体 $x(t)$。因此当 (α,β) 为有限区間时，$\mathfrak{D}(t\cdot)$ 虽然和 $L_2(\alpha,\beta)$ 一致，但是当 (α,β) 为无限区間时，$\mathfrak{D}(t\cdot)$ 和 $L_2(\alpha,\beta)$ 并不一致。例如 $x(t)=t^{-1}$ 属于 $L_2(1,\infty)$，但 $t\cdot x(t)=t\cdot t^{-1}=1$ 不属于 $L_2(1,\infty)$。

例 4　**动量算子 $i^{-1}d/dt$**[1]　对于 $x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$，以 $i^{-1}dx(t)/dt\in L_2(\alpha,\beta)$ 与之对应，得一加法算子 $i^{-1}d/dt$，它的定义域 $\mathfrak{D}(i^{-1}d/dt)$ 是在所有絕对連續的 $x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$ 中使 $i^{-1}dx(t)/dt$ 属于 $L_2(\alpha,\beta)$ 的全体 $x(t)$。因此，即使 (α,β) 是有限区間，$\mathfrak{D}(i^{-1}d/dt)$ 和 $L_2(\alpha,\beta)$ 也不一致，因为到处不可微的連續函数是存在的。

例 5　固定 $y(t)\in L_2(\alpha,\beta)$，对于每一个 $x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$，让 (x,y) 和 $x(t)$ 对应，則得一个以 $L_2(\alpha,\beta)$ 为定义域的加法泛函。

算子的連續性　加法算子 T 的連續性是借条件：

$$\text{如果 } x_n,\ x\in\mathfrak{D}(T) \text{ 且 } x_n\to x,\ \text{則总有 } Tx_n\to Tx \tag{3.4}$$

而定义的。

[1] $i=\sqrt{-1}$。

定理 1.5 加法算子 T 为連續的必要而且充分的条件是：存在正数 γ 使得

$$\text{对于一切 } x\in \mathfrak{D}(T)\text{，有 } \|Tx\|\leqslant\gamma\|x\|. \tag{3.5}$$

証明 首先注意 $T\cdot 0=T(x-x)=Tx-Tx=0$。(必要性) 假定存在点列 $\{x_n\}$：$\|Tx_n\|>n\|x_n\|$；由剛才的注意可知 $x_n\neq 0$，从而可以考虑 $y_n=x_n/\sqrt{n}\|x_n\|$。这时由于 $\|Tx_n\|>n\|x_n\|$，得到

$$\|y_n\|=1/\sqrt{n}\to 0,\ \|Ty_n\|=(\sqrt{n}\|x_n\|)^{-1}\|Tx_n\|>\sqrt{n},$$

因此与 T 的連續性(在 0 处)相違反。(充分性) 由

$$\|Tx-Tx_n\|=\|T(x-x_n)\|\leqslant\gamma\|x-x_n\|$$

可以看出。

有界算子 由前定理可以看出，就 $\mathfrak{D}(T)=X$ 这样的加法算子 T 来說，它的連續性是和 $\|Tx\|$ 在以原点为中心、半徑为 1 的球 $\{x;\|x\|\leqslant 1\}$ 上的有界性等价的，因此，$\mathfrak{D}(T)=X$ 这样的連續加法算子称为**有界加法算子**，或简称为**綫性算子**；对于这样的 T，称

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| \tag{3.6}$$

为 T 的范数。由于 T 的加法性，$\|T\|$ 是和满足条件：

$$\text{对于一切的 } x\in X\text{，都有 } \|Tx\|\leqslant\gamma\|x\| \tag{3.7}$$

的正数 γ 的下确界一致。

例 1 第 8 頁例 1 为有界算子的例，又例 2 为有界泛函的例。在例 2 中，所考察的泛函的范数为 1。这是因为在 t_0 取得最大值的連續函数 $x(t)\in C[0,1]$ 存在。

例 2 如 (α,β) 是有限区間，則坐标算子 $t\cdot$ 为有界算子，并且它的范数 $\leqslant\max(|\alpha|,|\beta|)$。但如 (α,β) 为无限区間，則坐标算子 $t\cdot$ 不連續。例如 $L_2(0,\infty)$ 的函数列 $x_n(t)$：

$$x_n(t)=\begin{cases}1/n & n\leqslant t<n+1,\\ 0 & t<n \text{ 或 } t\geqslant n+1\end{cases}$$

有 $\|x_n\|=\left(\int_n^{n+1}n^{-2}dt\right)^{\frac{1}{2}}=n^{-1}\to 0$，可是由于 $\|t\cdot x_n(t)\|=\left(\int_n^{n+1}t^2n^{-2}dt\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant 1$，并不使 $t\cdot x_n\to 0$。

例 3 动量算子 $i^{-1}d/dt$ 不連續。例如考虑图 3.1 所画的属于 $L_2(0,1)$ 的函数 $x_n(t)$，除 $t=\frac{m}{2n}$ 以外都有 $|dx_n(t)/dt|=1$，从而 $i^{-1}dx_n(t)/dt$ 的范数 $=1$。可是由于在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 一致地 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$，故 $i^{-1}d/dt$ 不連續(在 0 矢量处)。



图 3.1

例 4 加法泛函 $Tx=(x,y)$ 是有界的，理由是 $|Tx|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$。由这不等式又得 $\|T\|\leqslant\|y\|$，至于此等号的成立可从 $y\neq 0$ 时

$$T(y/\|y\|)=\|y\|^{-1}(y,\ y)=\|y\|$$

看出。

逆算子 加法算子 T 給出 $\mathfrak{D}(T)$ 与 $\mathfrak{W}(T)$ 之間的一对一对应的必要与充分条件为

$$\text{如 } Tx=0, \text{ 则 } x=0. \tag{3.8}$$

当这条件满足时，作为映照 $T\,(x\to Tx)$ 的逆映照而得到的 T^{-1} 是加法算子，满足条件

$$T^{-1}(Tx)=x,\ x\in\mathfrak{D}(T);\ T(T^{-1}y)=y,\ y\in\mathfrak{W}(T), \tag{3.9}$$

而且 $\mathfrak{D}(T^{-1})=\mathfrak{W}(T)$，$\mathfrak{W}(T^{-1})=\mathfrak{D}(T)$。这个 T^{-1} 称为 T 的逆算子。

例 在 $L_2(1,\beta)$ 中的坐标算子 $t\cdot$ 的逆算子为 $t^{-1}\cdot$。如果 $-\infty<\alpha<\beta<\infty$，则在 $L_2(\alpha,\ \beta)$ 中动量算子 $i^{-1}d/dt$ 沒有逆算子。这是因为在 $(\alpha,\ \beta)$ 上恒等于 1 的函数 $x(t)\in L_2(\alpha,\ \beta)$ 映照于 0。

定理 1.6 加法算子 T 具有連續逆算子的必要与充分条件为存在正数 δ，使得

$$\text{对于一切 } x\in\mathfrak{D}(T),\ \text{都有 } \|Tx\|\geqslant\delta\|x\|. \tag{3.10}$$

証明 由定理 1.5 即可証得。

例 在前例中如 $\beta<\infty$，則 $t\cdot$ 的逆算子 $t^{-1}\cdot$ 是連續的(实为有界的)。

算子的和、积 $\mathfrak{D}(T)$, $\mathfrak{D}(S)\subseteqq X$, 且 $\mathfrak{W}(T)$, $\mathfrak{W}(S)\subseteqq X_1$, 这样的加法算子 T, S 的和是由

$$(T+S)x=Tx+Sx,\ x\in\mathfrak{D}(T)\cap\mathfrak{D}(S)$$

而定义的。又 αT 是由

$$\begin{cases}(\alpha T)x=\alpha Tx,\ x\in\mathfrak{D}(T),\\ \text{但如 } \alpha=0,\ \alpha T=0\ \text{(对于一切 } x\in X \text{ 对应着 0 的算子)}\end{cases}$$

而定义的;其次,如 $\mathfrak{D}(U)\subseteqq X_1$, 则 U 与 T 的积是由

$$(UT)x=U(Tx),\ \mathfrak{D}(UT)=\{x; x\in\mathfrak{D}(T)\text{且 } Tx\in\mathfrak{D}(U)\}$$

而定义的。这里积的顺序很关紧要。例如設 $T=t\cdot$, $U=i^{-1}d/dt$, 则 $UT=TU$ 并不成立,而代替它的是 Heisenberg 关系

$$(UT-TU)x=i^{-1}Ix,\ x\in\mathfrak{D}(UT)\cap\mathfrak{D}(TU). \tag{3.11}$$

这里 I 是指对于每一个 $x\in X$ 仍旧对应着 x 的恒等算子。又如果 $\mathfrak{D}(T)$ 和 $\mathfrak{W}(T)$ 都在 X 中,可将 TT 写为 T^2, 一般通过 $T^n=TT^{n-1}$ 可定义 T 的任何正整数次幂。

§4 Banach 空間, Hilbert 空間

賦范空間 X 的点列 $\{x_n\}$ 如果收斂于 X 的点 x, 那么, 由 $\|x_n-x_m\|=\|x_n-x+x-x_m\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x-x_m\|$ 可以看出,它是满足 Cauchy 收斂条件

$$\lim_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0 \tag{4.1}$$

的。反之,如果对于满足 Cauchy 条件的点列 $\{x_n\}$, 总存在极限 $x\in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$[1], 那么这賦范空間 X 便称为 **Banach 空間**。换句話說, Banach 空間乃是指这种賦范空間,就是根据它的范数所定义的距离 $\mathrm{dis}(x,y)=\|x-y\|$ 使它成为完备的(complete)距离空間。又完备的 pre-Hilbert 空間称为 **Hilbert**

---

[1] 这样的极限 x 如果存在必是唯一的, 这可从下面看出: 設 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y\|=0$, 则由 $\|x-y\|=\|x-x_n+x_n-y\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n-y\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ 得 $x=y$.

空間。

例 1　$C[\alpha, \beta]$ 为 Banach 空間。这是因为根据 $C[\alpha, \beta]$ 中范数 (1.12) 所定义的收斂，意味着在 $[\alpha, \beta]$ 上的一致收斂。

例 2　$L_2(\alpha, \beta)$ 为 Hilbert 空間。

証明（$L_2(\alpha, \beta)$ 的完备性）　如果 $L_2(\alpha, \beta)$ 中的点列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m\| = 0$，那么可选出适当的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$。这么一来，因为 $L_2(\alpha, \beta)$ 是矢量空間，就有

$$y_m(t) = |x_{n_1}(t)| + \sum_{k=1}^{m} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \in L_2(\alpha, \beta),$$

且由三角不等式(1.10)，有

$$\|y_m\| \leqslant \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{m} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|.$$

又因 $y_m(t) \geqslant 0$，由 Lebesgue-Fatou 定理[1]

$$\int_\alpha^\beta (\lim_{m\to\infty} y_m(t))^2 dt = \int_\alpha^\beta (\varliminf_{m\to\infty} y_m(t))^2 dt \leqslant \varliminf_{m\to\infty}\int_\alpha^\beta y_m(t)^2 dt = \varliminf_{m\to\infty}\|y_m\|^2.$$

因此 $\int_\alpha^\beta (\lim\limits_{m\to\infty} y_m(t))^2 dt \leqslant (\|x_{n_1}\| + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|)^2 < \infty$，故对于殆遍的 t 必存在有限的 $\lim\limits_{m\to\infty} y_m(t)$，从而对于这样的 t，

$$x_{n_{m+1}}(t) = x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{m} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))$$

收斂，且其极限函数 $x_\infty(t) = \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_{m+1}}(t)$ 必 $\in L_2(\alpha, \beta)$。这是因为有

$$\int_\alpha^\beta |x_{n_{m+1}}(t)|^2 dt \leqslant \int_\alpha^\beta |y_m(t)|^2 dt \leqslant (\|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|)^2,$$

再用 Lebesgue-Fatou 定理而得

$$\int_\alpha^\beta |x_\infty(t)|^2 dt = \int_\alpha^\beta \lim_{m\to\infty} |x_{n_{m+1}}(t)|^2 dt = \int_\alpha^\beta \varliminf_{m\to\infty} |x_{n_{m+1}}(t)|^2 dt$$
$$\leqslant \varliminf_{m\to\infty}\int_\alpha^\beta |x_{n_{m+1}}(t)|^2 dt \leqslant (\|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|)^2$$

的緣故。其次，由 Lebesgue-Fatou 定理得到

$$\|x_\infty - x_{n_k}\| \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \|x_{n_m} - x_{n_k}\| \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \|x_{n_{l+1}} - x_{n_l}\|,$$

右边作为收斂級数自第 k 项开始的和，当 $k\to\infty$ 时它 $\to 0$，因此 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_\infty - x_{n_k}\| = 0$。但由于三角不等式与 Cauchy 收斂条件

---

[1] 参看本丛书，河田敬義著《集合·拓扑·测度》。

$$\|x_\infty-x_m\|=\|x_\infty-x_{n_k}+x_{n_k}-x_m\|\leqslant\|x_\infty-x_{n_k}\|+\|x_{n_k}-x_m\|,$$

右边随着m与k的增大而成为任意小，即$\lim\limits_{m\to\infty}\|x_\infty-x_m\|=0$。

注　在$L_2(\alpha,\beta)$中，如果$\{x_n(t)\}$按照范数的意义收斂于$x(t)$，那么必有适当的子列$\{x_{n_k}(t)\}$殆遍收斂于$x(t)$。

例 3　$A_2(R)$为 Hilbert 空間。

証明（$A_2(R)$的完备性）　如果$A_2(R)$的点列$\{f_n(z)\}$满足$\lim\limits_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$，那么其适当的子列$\{f_{n_k}(z)\}$在$R$上所殆遍收斂的极限函数$f_\infty(z)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(z)$满足$\iint_R|f_\infty(z)|^2dx\,dy<\infty$。因此，如能指出$f_\infty(z)$在$R$的单值正則性，則与例1一样可知$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_\infty-f_n\|=0$，从而$A_2(R)$是完备的。

事实上，对于R内的任意开圓$|z-z_0|<r$，只要$0<r_0<r$，并設$r-r_0>\delta>0$，可証

当$|z-z_0|\leqslant r_0$时，有不等式

$$|f_{n_k}(z)-f_{n_j}(z)|^2\leqslant(\pi\delta^2)^{-1}\iint_{|w-z|<\delta}|f_{n_k}(w)-f_{n_j}(w)|^2dx\,dy,\quad(4.2)$$

在此$w=x+\sqrt{-1}\,y$，因此$f_{n_k}(z)$在$|z-z_0|\leqslant r_0$一致收斂。由于$f_{n_k}(z)$正則，从而$f_\infty(z)$也在$|z-z_0|<r$正則，于是$f_\infty(z)$在R中单值正則。最后，关于

(4.2)的証明　这只須証明当$f(w)$在$|w-z|\leqslant\delta$正則时有

$$|f(z)|^2\leqslant(\pi\delta^2)^{-1}\iint_{|w-z|<\delta}|f(w)|^2dx\,dy,\quad w-z=x+\sqrt{-1}\,y\quad(4.2')$$

就可以了。事实上，設$f(w)$的 Taylor 展开为

$$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(w-z)^n,\quad c_0=f(z)\quad(|w-z|\leqslant\delta),$$

置$w-z=x+\sqrt{-1}\,y=\rho\exp(\sqrt{-1}\,\theta)$，由于

$$f(w)\overline{f(w)}=\sum_{n,m=0}^{\infty}c_n\bar{c}_m\rho^{n+m}\exp(\sqrt{-1}\,(n-m)\theta)$$

在$0\leqslant\rho\leqslant\delta$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$中絕对且一致收斂，故可逐項积分而得

$$\iint_{|w-z|<\delta}|f(w)|^2dx\,dy=\int_0^\delta\rho d\rho\int_0^{2\pi}|f(w)|^2d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2(2n+2)^{-1}\delta^{2n+2}\cdot2\pi\geqslant\pi\delta^2|f(z)|^2.\quad(4.3)$$

例 4　和例2一样，$L_1(\alpha,\beta)$也是完备的，所以也是 Banach 空間。

例 5　对于函数类C^1上，按 Dirichlet 式范数所成的空間（§1 例5）是不

完备的。茲就一維（单变数）情形来說明。設 $x(t)$ 为在 $-1\leqslant t<0$ 时等于 -1，在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时等于1的函数，由 Lebesgue 积分的定义，对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在連續函数 $x_\varepsilon(t)$，使得 $\int_{-1}^{1}|x(t)-x_\varepsilon(t)|^2dt<\varepsilon$。又由 Weierstrass 的多項式逼近定理，存在多項式 $p_\varepsilon(t)$，使得 $\sup\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}|x_\varepsilon(t)-p_\varepsilon(t)|<(2^{-1}\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$。从而因为 $\int_{-1}^{1}|x_\varepsilon(t)-p_\varepsilon(t)|^2dt<\varepsilon$，按三角不等式有

$$\int_{-1}^{1}|x(t)-p_\varepsilon(t)|^2dt<(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon})^2=4\varepsilon.$$

其次置

$$\int_0^t x(t)\,dt=|t|=y(t),\quad \int_0^t p_\varepsilon(t)\,dt=q_\varepsilon(t),$$

因为 $y(t)-q_\varepsilon(t)=\int_0^t(x(t)-p_\varepsilon(t))dt$，故在 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 上，

$$\begin{aligned}|y(t)-q_\varepsilon(t)|^2&=\left|\int_0^t(x(t)-p_\varepsilon(t))dt\right|^2\\&\leqslant\left|\int_0^t 1\cdot dt\right|\cdot\left|\int_0^t|x(t)-p_\varepsilon(t)|^2dt\right|\leqslant 1\cdot 4\varepsilon.\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1}|y(t)-q_\varepsilon(t)|^2dt=0$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1}|x(t)-q_\varepsilon'(t)|^2dt=0$ 成立，即多項式序列 $\{q_{\frac{1}{n}}(t)\}$ 虽然在 Dirichlet 式范数

$$\|q\|=\left(\int_{-1}^{1}|q(t)|^2dt+\int_{-1}^{1}|q'(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

的意义下满足 Cauchy 收斂条件，但其极限函数 $y(t)=|t|$ 决不殆遇等于 C^1 类中的任一函数。

同样地也可作出說明 $\mathfrak{D}^k(R)$ 不完备的例子。

§5　完　备　化

因为对賦范空間内定义的算子进行分析研究时用到种种的极限論中的方法，所以如果这空間不完备就会引起不便。从关于极限不完备的有理数体可以作出完备的实数体，按照与此相同的想法可以从不完备的賦范空間作一 Banach 空間，使得原賦范空間是这个 Banach 空間的稠密的子空間，也就是說，对不完备的賦范空間添加某些“理想点”后可使成为 Banach 空間，从而在其中灵

活地运用极限論的方法。不过在多数情形里，“理想点”只是在討論过程中执行着补助的中間的任务，而并不出现在实际結論的形式中。

距离空間的完备化　設給定一个不完备的距离空間 X，让我們来考虑所有在 X 的点列 $\{x_n\}$ 中满足 Cauchy 收斂条件

$$\lim_{n,m\to\infty} \operatorname{dis}(x_n, x_m)=0 \tag{5.1}$$

的那些点列 $\{x_n\}$ 的全体。設对于 $\{x_n\}$ 与 $\{x'_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{dis}(x_n, x'_n)=0$ 时，我們記为 $\{x_n\}\sim\{x'_n\}$，那么关系 $\sim$ 满足**等价律**：

$$\{x_n\}\sim\{x_n\}, \tag{5.2}$$

$$若\ \{x_n\}\sim\{x'_n\},\ 則\ \{x'_n\}\sim\{x_n\}, \tag{5.3}$$

$$若\ \{x_n\}\sim\{x'_n\},\ \{x'_n\}\sim\{x''_n\},\ 則\ \{x_n\}\sim\{x''_n\}. \tag{5.4}$$

因此把所有与 $\{x_n\}$ 等价的归为一类 $\tilde{x}$，便可以考虑以这些类 $\tilde{x}$ 为元素的新的空間 $\tilde{X}$。$\{x_n\}$ 是类 $\tilde{x}$ 的一个代表——如 $\{x_n\}\sim\{x'_n\}$，則 $\{x'_n\}$ 也是 $\tilde{x}$ 的代表之一。

如果分别从类 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 中任意选取代表 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{dis}(x_n, y_n)$ 必收斂。

証明　因为由三角不等式有

$$\operatorname{dis}(x_n, y_n)\leqslant\operatorname{dis}(x_n, x_m)+\operatorname{dis}(x_m, y_m)+\operatorname{dis}(y_m, y_n),$$

从而得

$$\operatorname{dis}(x_n, y_n)-\operatorname{dis}(x_m, y_m)\leqslant\operatorname{dis}(x_n, x_m)+\operatorname{dis}(y_m, y_n),$$

将 n 与 m 互换又得

$$\operatorname{dis}(x_m, y_m)-\operatorname{dis}(x_n, y_n)\leqslant\operatorname{dis}(x_m, x_n)+\operatorname{dis}(y_n, y_m).$$

故

$$|\operatorname{dis}(x_n, y_n)-\operatorname{dis}(x_m, y_m)|\leqslant\operatorname{dis}(x_n, x_m)+\operatorname{dis}(y_n, y_m)\to 0$$
$$(n, m\to\infty).$$

其次，$\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{dis}(x_n, y_n)$ 的值和 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 的代表 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 的选取无关。

証明　設 $\{x'_n\}\sim\{x_n\}$, $\{y'_n\}\sim\{y_n\}$，則

$$\mathrm{dis}(x_n, y_n) \leqslant \mathrm{dis}(x_n, x'_n) + \mathrm{dis}(x'_n, y'_n) + \mathrm{dis}(y'_n, y_n)$$

的右边第1項、第3項$\to 0$ $(n\to\infty)$，故

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x'_n, y'_n).$$

同样可得

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x'_n, y'_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x'_n, y'_n).$$

因此对于 $\tilde{X}$ 的两点 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, 可以定义

$$\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n), \tag{5.5}$$

它由 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 唯一确定。按照这个 $\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{X}$ 成为距离空間。

証明　显然 $\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geqslant 0$. 又 $\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) = 0$ 表示 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$，即 $\tilde{x} = \tilde{y}$. 其次由(5.5)与 $\mathrm{dis}(x_n, y_n) = \mathrm{dis}(y_n, x_n)$ 可以看出 $\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathrm{dis}(\tilde{y}, \tilde{x})$.

三角不等式可如下証明：設 $\{x_n\} \in \tilde{x}$, $\{y_n\} \in \tilde{y}$, $\{z_n\} \in \tilde{z}$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{z}) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \{\mathrm{dis}(x_n, y_n) + \mathrm{dis}(y_n, z_n)\} \\ &= \mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \mathrm{dis}(\tilde{y}, \tilde{z}).\end{aligned}$$

距离空間 $\tilde{X}$ 是完备的。

証明　設 $\lim\limits_{n, m\to\infty} \mathrm{dis}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) = 0$. 从每一类 $\tilde{x}_n$ 中各选一个代表 $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots\}$. 因为它們都满足 Cauchy 收斂条件，故可选 k_n 使得

$$m > k_n \text{ 时就有 } \mathrm{dis}(x_m^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) \leqslant n^{-1}. \tag{5.6}$$

这么一来，便可証明

$$\{x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}, \cdots\} \tag{5.7}$$

所属的类必为 $\{\tilde{x}_n\}$ 在 $\tilde{X}$ 的极限。首先，由 X 中同一点 $x_{k_n}^{(n)}$ 排成的点列

$$\{x_{k_n}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}, \cdots\}, \tag{5.8}$$

其所属的类如果記为 $\tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)}$ 的話，那么由(5.6)有

$$\operatorname{dis}(\tilde{x}_n, \tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)}) = \lim_{m\to\infty} \operatorname{dis}(x_m^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) \leqslant n^{-1}. \tag{5.9}$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{dis}(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) &= \operatorname{dis}(\tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)}, \tilde{\tilde{x}}_{k_m}^{(m)}) \\ &\leqslant \operatorname{dis}(\tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)}, \tilde{x}_n) + \operatorname{dis}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) + \operatorname{dis}(\tilde{x}_m, \tilde{\tilde{x}}_{k_m}^{(m)}) \\ &\leqslant \operatorname{dis}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) + n^{-1} + m^{-1},\end{aligned}$$

从而 (5.7) 满足 Cauchy 收斂条件。設它所属的类为 $\tilde{x}$，那么由 (5.9)，

$$\begin{aligned}\operatorname{dis}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) &\leqslant \operatorname{dis}(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)}) + \operatorname{dis}(\tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)}, \tilde{x}_n) \\ &\leqslant \operatorname{dis}(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)}) + n^{-1}.\end{aligned}$$

而且因为（如象上面所示）

$$\begin{aligned}\operatorname{dis}(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)}) &= \lim_{p\to\infty} \operatorname{dis}(x_{k_p}^{(p)}, x_{k_n}^{(n)}) \\ &\leqslant \lim_{p\to\infty} \operatorname{dis}(\tilde{x}_p, \tilde{x}_n) + n^{-1},\end{aligned}$$

有

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dis}(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)}) = 0. \tag{5.10}$$

最后，从下面可以看出 X 可当做是 $\tilde{X}$ 的稠密子集，对于 $\tilde{X}$ 的任何点 $\tilde{x}$，存在着满足(5.10)的点 $\tilde{\tilde{x}}_{k_n}^{(n)} \in \tilde{X}$，而(5.8)可选为 $\tilde{x}_{k_n}^{(n)}$ 的代表❶。因此，如果一般对于 X 的点 x' 介 $\{x', x', \cdots\}$ 所属的（$\tilde{X}$ 的）类和它对应，那么，对应关系

$$X \ni x' \Leftrightarrow \tilde{\tilde{x}}' \in \tilde{X} \tag{5.11}$$

是一对一的，而且

$$\operatorname{dis}(x', y') = \operatorname{dis}(\tilde{\tilde{x}}', \tilde{\tilde{y}}'). \tag{5.12}$$

不仅如此，对于任意的 $\tilde{x} \in \tilde{X}$ 与任意的 $\varepsilon > 0$，还在存着满足 $\operatorname{dis}(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}'_\varepsilon) < \varepsilon$ 的 $\tilde{\tilde{x}}'_\varepsilon \in \tilde{X}$。也就是説，按照对应 (5.11)，空間 X 一

---

❶ 事实上，这一点可以簡单地得到，設 $\tilde{x} \in \tilde{X}$，$\{x_n\}$ 是 $\tilde{x}$ 的一个代表，则

$$\operatorname{dis}(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}_n) = \lim_{m\to\infty} \operatorname{dis}(x_m, x_n).$$

因 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 收斂条件，故 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dis}(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}_n) = 0$。——校者注

对一地等距离地(满足(5.12)的)对应着 $\tilde{X}$ 的一个子集 $\tilde{X}'$，而且 $\tilde{X}'$ 在 $\tilde{X}$ 内是稠密的。将 $\tilde{X}'$ 看做是与 X 同一的，便得下面的定理：

定理 1.7　对于不完备的距离空間 X，可作完备的距离空間 $\tilde{X}$，使得 X 一对一且等距离地对应着 $\tilde{X}$ 的稠密子集 $\tilde{X}'$。

这 $\tilde{X}$ 称为 X 的**完备化**(completion)，今后用 $X^{(C)}$ 表示。

赋范空間的完备化　不完备的赋范空間 X，按照距离 $\operatorname{dis}(x, y)=\|x-y\|$ 作为距离空間而完备化后所得的 $\tilde{X}=X^{(C)}$ 可作为 Banach 空間。

証明　当 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 分别为 $\tilde{x}\in\tilde{X}$ 及 $\tilde{y}\in\tilde{X}$ 的代表时，$\{x_n+y_n\}$ 必满足 Cauchy 收斂条件。这是因为

$$\|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)\|\leqslant\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|\to 0\quad(n, m\to\infty).$$

此外，当 $\{x'_n\}\sim\{x_n\}$，$\{y'_n\}\sim\{y_n\}$ 时有 $\{x'_n+y'_n\}\sim\{x_n+y_n\}$，这由

$$\|(x'_n+y'_n)-(x_n+y_n)\|\leqslant\|x'_n-x_n\|+\|y'_n-y_n\|\quad(n\to\infty)$$

可以看出，从而可以定义(由类 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 唯一确定的)含有 $\{x_n+y_n\}$ 的类 $\tilde{x}+\tilde{y}$。同样地可以定义(由类 $\tilde{x}$ 唯一确定的)含有 $\{\alpha x_n\}$ 的类 $\alpha\tilde{x}$。通过和 $\tilde{x}+\tilde{y}$ 与数积 $\alpha\tilde{x}$ 不难看出 $\tilde{X}$ 是矢量空間。此外，

$$\|\tilde{x}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\operatorname{dis}(x_n, 0)$$

满足范数条件，这和距离空間的情形一样，也是容易明白的，因此 $\tilde{X}$ 是赋范空間，而且由于同时是完备的距离空間，所以还是 Banach 空間。

pre-Hilbert 空間的完备化　pre-Hilbert 空間 X 作为赋范空間而完备化后所得的 $\tilde{X}$ 是 Hilbert 空間。

証明　只需指出这 Banach 空間 $\tilde{X}$ 的范数可由一个内积来定义就够了，而这从(2.11)可知。事实上，通过

$$(\tilde{x}, \tilde{y})=4^{-1}\{\|\tilde{x}+\tilde{y}\|^2-\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2+\sqrt{-1}(\|\tilde{x}+\sqrt{-1}\tilde{y}\|^2-\|\tilde{x}-\sqrt{-1}\tilde{y}\|^2)\}\quad(5.13)$$

可在 $\tilde{X}$ 上定义内积 $(\tilde{x}, \tilde{y})$。

首先，$(\tilde{x}, \tilde{x}) = 4^{-1}\{4\|\tilde{x}\|^2 - 0 + i\cdot 0\} = \|\tilde{x}\|^2$，此地 $i=\sqrt{-1}$。其次，由 (2.10) 得

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|^2 + \|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2 = 2(\|\tilde{x}\|^2 + \|\tilde{y}\|^2),$$

从而

$$\begin{aligned}
&(\tilde{x}, \tilde{z}) + (\tilde{y}, \tilde{z})\\
&\quad = 4^{-1}\{\|\tilde{x}+\tilde{z}\|^2 - \|\tilde{x}-\tilde{z}\|^2 + i(\|\tilde{x}+i\tilde{z}\|^2 - \|\tilde{x}-i\tilde{z}\|^2)\}\\
&\qquad + 4^{-1}\{\|\tilde{y}+\tilde{z}\|^2 - \|\tilde{y}-\tilde{z}\|^2 + i(\|\tilde{y}+i\tilde{z}\|^2 - \|\tilde{y}-i\tilde{z}\|^2)\}\\
&\quad = 2^{-1}\left\{\left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}+\tilde{z}\right\|^2 - \left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}-\tilde{z}\right\|^2\right.\\
&\qquad \left. + i\left(\left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}+i\tilde{z}\right\|^2 - \left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}-i\tilde{z}\right\|^2\right)\right\}\\
&\quad = 2\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}, \tilde{z}\right).
\end{aligned}$$

在此置 $\tilde{y}=0$，更注意由 (5.13) 有 $(\tilde{0}, \tilde{z})=0$，遂得

$$(\tilde{x}, \tilde{z}) = 2\left(\frac{\tilde{x}}{2}, \tilde{z}\right).$$

因此也就有

$$(\tilde{x}, \tilde{z}) + (\tilde{y}, \tilde{z}) = 2\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}, \tilde{z}\right) = (\tilde{x}+\tilde{y}, \tilde{z}).$$

由此可知对一切有理数 α，$(\alpha\tilde{x}, \tilde{y}) = \alpha(\tilde{x}, \tilde{y})$ 成立。因由定理 1.1，$\|\alpha\tilde{x}+\tilde{y}\|$，$\|\alpha\tilde{x}-\tilde{y}\|$ 关于 α 是连续的，连同关系 (5.13) 便知对一切实数 α，$(\alpha\tilde{x}, \tilde{y}) = \alpha(\tilde{x}, \tilde{y})$ 都成立。又根据 $\|i\tilde{z}\| = \|\tilde{z}\|$，

$$\begin{aligned}
(i\tilde{x}, \tilde{y}) &= 4^{-1}\{\|i\tilde{x}+\tilde{y}\|^2 - \|i\tilde{x}-\tilde{y}\|^2 + i(\|i\tilde{x}+i\tilde{y}\|^2 - \|i\tilde{x}-i\tilde{y}\|^2)\}\\
&= 4^{-1}\{\|\tilde{x}-i\tilde{y}\|^2 - \|\tilde{x}+i\tilde{y}\|^2 + i(\|\tilde{x}+\tilde{y}\|^2 - \|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2)\}\\
&= i(\tilde{x}, \tilde{y})
\end{aligned}$$

也成立，故对一切复数 α，$(\alpha\tilde{x}, \tilde{y}) = \alpha(\tilde{x}, \tilde{y})$ 也成立。同样又可得

$$\begin{aligned}
(\tilde{y}, \tilde{x}) &= 4^{-1}\{\|\tilde{y}+\tilde{x}\|^2 - \|\tilde{y}-\tilde{x}\|^2 + i(\|\tilde{y}+i\tilde{x}\|^2 - \|\tilde{y}-i\tilde{x}\|^2)\}\\
&= 4^{-1}\{\|\tilde{x}+\tilde{y}\|^2 - \|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2 + i(\|\tilde{x}-i\tilde{y}\|^2 - \|\tilde{x}+i\tilde{y}\|^2)\}\\
&= \overline{(\tilde{x}, \tilde{y})}.
\end{aligned}$$

于是 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 满足内积的一切条件。

完备化的例1　設 X 为在区域 R 上具有一阶連續偏导数的实值函数 $f(x)$ 的全体，在赋与 Dirichlet 式范数（$q(x)$ 恒 >0）

$$\|f\|=\left(\int_R\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+q(x)f(x)^2\right\}dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

之后，成为 pre-Hilbert 空間。設 X 的点列 $\{f_n(x)\}$ 满足 Cauchy 收斂条件 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$。和 $L_2(\alpha, \beta)$ 的情形（§4）相仿，可选取适当的子列 $\{f_{k_n}(x)\}$，使对殆遍的 $x=(x_1, x_2)\in R$ 成立着

$$(*)\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} f_{k_n}(x)=f_\infty(x) \text{ 存在}, \int_R q(x)\, f_\infty(x)^2\, dx<\infty, \text{且} \\ \qquad \lim\limits_{n\to\infty}\int_R q(x)\,(f_\infty(x)-f_{k_n}(x))^2\, dx=0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\partial f_{k_n}(x)}{\partial x_i}=f_{\infty i}(x) \quad (i=1, 2) \text{ 存在}, \\ \qquad \int_R (f_{\infty 1}(x)^2+f_{\infty 2}(x)^2)\, dx<\infty \text{ 且} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\int_R\left[\left(f_{\infty 1}(x)-\dfrac{\partial f_{k_n}(x)}{\partial x_1}\right)^2+\left(f_{\infty 2}(x)-\dfrac{\partial f_{k_n}(x)}{\partial x_2}\right)^2\right]dx=0.\end{cases}$$

即 $\tilde{X}$ 的点是通过三个函数所成的組 $f_\infty(x)$，$f_{\infty 1}(x)$，$f_{\infty 2}(x)$ 而具体地給出的，此时不一定有

$$f_{\infty i}(x)=\frac{\partial f_\infty(x)}{\partial x_i},$$

但对于任何一个在 R 上一次連續可微，并且在含于 R 内部的某有界閉集 F 之外恒等于 0 的函数（也就是属于 $\mathfrak{D}^1(R)$ 的函数）$\varphi(x)$ 总有

$$-\int_R f_\infty(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx=\int_R f_{\infty i}(x)\varphi(x)\,dx \quad (i=1, 2) \tag{5.14}$$

成立。因为 $\varphi(x)$ 在 F 外部恒等于 0，由分部积分有

$$-\int_R f_{k_n}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx=\int_R\frac{\partial f_{k_n}}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx,$$

在此令 $n\to\infty$ 并注意 $(*)$ 便得 (5.14)。这就是說，在广义函数意义❶下，f_∞ 关于 x_i 的偏导函数成为 $f_{\infty i}$。

完备化的例2　Hilbert 空間 $H_k(R)$　pre-Hilbert 空間 $\mathfrak{D}^k(R)$ 按范数 $\|\ \|_k$ 完备化而得的实 Hilbert 空間記为 $H_k(R)$。設 R 为 m 維 Euclid 空間

❶ 参照本丛书，岩村联著《广义函数》。

E^m 中的区域，且 $\mathfrak{D}^\infty(R)$ 的函数列 $\{f_n(x)\}$，$f_n(x)=f_n(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，按范数

$$\|f\|_k=\left(\sum_{|s|\leqslant k}\int_R|D^{(s)}f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$D^{(s)}=\frac{\partial^{s_1+\cdots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_m^{s_m}},$$

满足 Cauchy 收敛条件 $\lim_{s,t\to\infty}\|f_s-f_t\|_k=0$。和例1相同，如果选取适当的子列 $\{f_{t_i}(x)\}$，可使对于殆遍的 $x\in R$，

$$\lim_{t_i\to\infty}D^{(s)}f_{t_i}(x)=f^{(s)}(x)\in H_0(R)=L_2(R)\ ❶$$

存在，在此設

$$|s|=\sum_{i=1}^{m}s_i\leqslant k.$$

$H_k(R)$ 的元素 $f^{(0)}(x)$ 虽然一般不見得可偏微分，但在广义函数意义下至少到 k 阶为止的偏导函数全部属于 $H_0(R)=L_2(R)$。故对于属于 $\mathfrak{D}^\infty(R)$ 的任何函数 $\varphi(x)$ 有

$$\int_R f^{(0)}(x)\cdot D^{(s)}\varphi(x)dx$$
$$=(-1)^{|s|}\int_R f^{(s)}(x)\cdot\varphi(x)dx,\quad |s|\leqslant k. \tag{5.15}$$

象上面这样的事实可表为

$$\widetilde{D}^{(s)}f^{(0)}(x)=f^{(s)}(x), \tag{5.16}$$

并称 $\widetilde{D}^{(s)}f^{(0)}$ 为 $f^{(0)}$ 的强偏导数。如上所述，有 $\widetilde{D}^{(s)}f^{(0)}\in L_2(R)$。

完备化的例3 Hilbert 空間 $\widetilde{H}_k(R)$ 在 R 上属于 C^∞ 且满足

$$\|f\|_k=\left(\sum_{|s|\leqslant k}\int_R|D^{(s)}f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

的 f 的全体成一 pre-Hilbert 空間，这空間完备化后記为 $\widetilde{H}_k(R)$。虽然 $\widetilde{H}_0(R)=H_0(R)=L_2(R)$，但在 $k\geqslant1$ 时 $\widetilde{H}_k(R)$ 和 $H_k(R)$ 一般是相异的。这是因为后者专指 C^∞ 中函数的支集不延到 R 的境界 ∂R 的所有函数构成的空間按 $\|\ \|_k$ 的完备化。尽管如此，$\widetilde{H}_k(R)$ 的函数 $f(x)$ 当 $|s|\leqslant k$ 时还是取 $\widetilde{D}^{(s)}f(x)\in L_2(R)$。

---

❶ $\int_R|f^{(s)}(x)|^2dx<\infty$。

第2章 射影，Riesz 定理

在 Hilbert 空間里和在 Euclid 空間里一样可以定义正射影的概念。利用这概念可以証明 F. Riesz 的定理，它告訴我們；Hilbert 空間里的有界加法泛函 $F(x)$ 都可由內积 (x, y) 的形式給出。这定理不仅是在 Hilbert 空間中研討固有値問題的基础，通过 Aronszajn 的再生核理論还联系到椭圓型偏微分方程解的表現。此外借助于 Milgram-Lax 定理的变形还給出椭圓型偏微分方程解的存在定理。

§6 射 影

正交 設 x, y 是 pre-Hilbert 空間 X 的元素，如果 $(x, y)=0$，便称矢量 x 和矢量 y **正交**，并記为 $x\perp y$. 如 $x\perp y$，則也有 $y\perp x$. 对于 X 的子集 M 来說，和 M 的所有元素正交的 $x\in X$ 的全体

$$M^{\perp}=\{x;\ x\perp y,\ y\in M\} \qquad (6.1)$$

称为 M 的**正交补空間** (orthogonal complement)。

定理 2.1 如 X 为 Hilbert 空間，則 $M^{\perp}$ 为 X 的子空間，并且是完备的。

証明 $M^{\perp}$ 为子空間可由 $(x_1, y)=0$，$(x_2, y)=0$ 蘊涵 $(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y)=0$ 而知。又由內积的連續性（定理 1.3），$M^{\perp}$ 成为 X 的閉集，而完备距离空間中的閉集显然是完备的。

凡完备的子空間称为**閉子空間**。

定理 2.2 对于和 Hilbert 空間 X 不一致的閉子空間 M，$M^{\perp}$ 含有不为 0 的矢量。

証明 任取 $y\overline{\in} M$，考虑集合

$$\{y-x;\ x\in M\}=K,$$

则 K 是凸(convex)的，就是指

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果 } z,\ w\in K,\ \text{那么对一切 } 1\geqslant\alpha\geqslant 0,\ \text{有}\\ \alpha z+(1-\alpha)w\in K.\end{array}\right\}\qquad(6.2)$$

事实上，設 $z=y-x_1$, $w=y-x_2$, $x_i\in M\ (i=1,\ 2)$ 得 $\alpha z+(1-\alpha)w=y-[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]$, 而由于 M 是子空間，$[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\in M$。

令

$$\alpha=\inf_{z\in K}\|z\|=\inf_{x\in M}\|y-x\|,$$

并取 M 的点列 $\{x_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y-x_n\|=\alpha$。由(2.10)，

$$\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2=\frac{\|y-x_n\|^2}{2}+\frac{\|y-x_m\|^2}{2}-\left\|y-\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2,$$

但因 $(x_n+x_m)/2\in M$，所以由(6.2)，$\left\|y-\dfrac{x_n+x_m}{2}\right\|^2\geqslant\alpha$，从而

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2\leqslant\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{2}-\alpha^2=0.$$

即 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 收敛条件。于是由 M 的完备性，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_\infty\in M$。不但如此，因 $y-x_\infty-(y-x_n)=x_n-x_\infty\to 0\ (n\to\infty)$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}(y-x_n)=y-x_\infty$，由定理 1.1 遂有

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\|y-x_n\|=\|y-x_\infty\|.$$

因此，由 $y\overline{\in}M$ 及 $x_\infty\in M$，必有 $\alpha>0$，从而 $z=y-x_\infty\neq 0$。

現在只需指出 $z\in M^\perp$ 就可以了。因 M 为子空間，故当 $x\in M$ 时，$x_\infty+\lambda x\in M$，从而对一切实数 λ，

$$\begin{aligned}\alpha^2\leqslant\|y-(x_\infty+\lambda x)\|^2&=\|z-\lambda x\|^2=(z-\lambda x,\ z-\lambda x)\\&=\|z\|^2-\lambda(z,\ x)-\lambda(x,\ z)+\lambda^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

因 $(z,\ x)+(x,\ z)=2\lambda\Re(z,\ x)$ ❶，且 $\alpha=\|z\|$，上式成为

$$\lambda^2\|z\|^2-2\lambda\,\Re(z,\ x)\geqslant 0.$$

---

❶ $\Re\beta$, $\Im\beta$ 表示 β 的实部和虚部。

由于 λ 为任意实数，得 $\Re(z, x)=0$。以 ix 代替 x，又可得 $\Im(z, x)=0$，故 $(z, x)=0$，也就是 $z\perp x$。

定理2.3 設 M 为 Hilbert 空間 X 的閉子空間，則任意的 $y\in X$ 可唯一地分解为

$$y=x+z,\quad x\in M,\quad z\in M^{\perp}.$$

証明 設 $M\neq X$。如果 $y\bar{\in} M$，那么前定理証明中的

$$y=x_{\infty}+(y-x_{\infty}) \tag{6.3}$$

便給出所求的分解；如果 $y\in M$，那么 $y=y+0$ 为所求分解。其次設 $M=X$，則 $y=y+0$ 成为所求的分解。分解的唯一性可如下看出：假如

$$y=x'+z',\quad x'\in M,\quad z'\in M^{\perp},$$

那么勢必 $x-x'=z'-z$ 旣属于 M 又属于 $M^{\perp}$，从而 $=0$，卽 $x=x'$，$z=z'$。

射影 分解 (6.3) 中的 x 称为 y 在 M 上的射影，記为 $x=P(M)y$；而 $P(M)$ 称为**射影算子** (projector)。

定理2.4 射影算子 P 为有界算子，且满足

$$P^2=P \quad (\text{冪等性}), \tag{6.4}$$

$$(Px, y)=(x, Py) \quad (\text{对称性}); \tag{6.5}$$

反之，在 Hilbert 空間满足(6.4)，(6.5) 的有界算子 P 为射影算子。

証明 (6.4) 由射影的定义可以明白。又由射影的定义，对于所有的 $y\in X$ 有

$$P(M)y+P(M^{\perp})y=y, \tag{6.6}$$

再由 $P(M)x\perp P(M^{\perp})y$ 遂得

$$\begin{aligned}(P(M)x, y)&=(P(M)x, P(M)y+P(M^{\perp})y)\\&=(P(M)x, P(M)y)\\&=(P(M)x+P(M^{\perp})x, P(M)y)\\&=(x, P(M)y).\end{aligned}$$

其次 $P(M)$ 的加法性由分解(6.3)的唯一性容易看出。事实上，由 $y=x+z$, $x\in M$, $z\in M^{\perp}$ 及 $w=u+v$, $u\in M$, $v\in M^{\perp}$ 得 $y+w=(x+u)+(z+v)$, $x+u\in M$, $z+v\in M^{\perp}$. 又 $P(M)$ 的有界性由

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\|P(M)x+P(M^{\perp})x\|^2\\&=(P(M)x+P(M^{\perp})x,\ P(M)x+P(M^{\perp})x)\\&=\|P(M)x\|^2+\|P(M^{\perp})x\|^2\geqslant\|P(M)x\|^2\end{aligned}$$

可以明白。

逆命題部分的証明 置 P 的值域 $\mathfrak{W}(P)=M$, 那么，由于 P 是加法算子，故 M 是一个子空間。如 $x\in M$, 则 $x=P(y)=P^2y=Px$, 从而 $x\in M$ 与 $x=Px$ 是等价的，于是 M 为閉子空間，这一点可以这样看出，即設 $\{x_n\}\in M$ 且 $x_n\to y$, 由 P 的有界性就有

$$x_n=Px_n\to Py,\ \text{从而}\ Py=y.$$

最后，$P=P(M)$ 的証明不妨如下进行：如 $x\in M$, 则 $Px=x=P(M)x$, 又如 $y\in M^{\perp}$, 则 $P(M)y=0$, 而且这时由于 $(Py, Py)=(y, P^2y)=(y, Py)=0$, 也有 $Py=0$. 因此根据 (6.6) 及 P 与 $P(M)$ 的加法性得 $P=P(M)$.

§7 Riesz 定理

定理 2.5 (F. Riesz) 对于在 Hilbert 空間 X 上定义的有界加法泛函 $f(x)$, 存在唯一的 $y_f\in X$, 使

$$f(x)=(x, y_f),\quad x\in X \tag{7.1}$$

成立。

証明 由于 f 的加法性与連續性，$M=\{x; f(x)=0\}$ 为閉子空間。因为在 $f(x)\equiv0$ 的情形只需在(7.1)中取 $y_f=0$ 就可以了，所以不妨假定 $f(x)\not\equiv0$, 从而 $M\neq X$. 由定理 2.2, 滿足 $y_0\in M^{\perp}$ 及 $\|y_0\|=1$ 的 y_0 存在，显然 $f(y_0)\neq0$. 置

$$y_f=\overline{f(y_0)}y_0, \tag{7.2}$$

这就是所求的。首先，如 $x\in M$ 或 $x=\alpha y_0$，则显然 $f(x)=(x, y_f)$. 其次，对于任意的 x，如置 $x_0=x-y_0f(x)/f(y_0)$，则 $f(x_0)=0$. 从而 $x_0\in M$。因此

$$0=f(x_0)=(x_0, y_f)=(x, y_f)-(y_0, y_f)f(x)/f(y_0)$$
$$=(x, y_f)-f(x).$$

满足(7.1)的这种 y_f，其唯一性可这样看出：設 $(x, y_f)=(x, y_f')$，则 y_f-y_f' 和所有 x 正交，从而 $y_f-y_f'=0$。

注　本定理的逆命題在§3的例(4)中已指出。又§6的諸定理对于实 Hilbert 空間也成立是不待言的。

§8 Aronszajn 的再生核，Bergman 的核函数

Riesz 定理是 Hilbert 空間論的基础，为了显示这个意义我們就 Aronszajn 的再生核加以論述。

再生核的定义　設定义在抽象集合 Ω 上的某些复数值函数 $f(x)$ 的函数系 X 构成一个 Hilbert 空間，并将其内积 (f, g) 写做

$$(f, g)=(f(x), g(x))_x \tag{8.1}$$

以标明它是 x 的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积。这时如果两变数 $x, y\in\Omega$ 的复值函数 $K(x, y)$ 满足条件：

对于任意的 $y\in\Omega$，$K(x, y)$ 看成 x 的函数时属于 X，　(8.2)

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于任意的 } y\in\Omega \text{ 与任意的 } f\in X,\\ f(y)=(f(x), K(x, y))_x,\end{array}\right\} \tag{8.3}$$

便称 K 为 X 的**再生核** (reproducing kernel)。从而又有

$$\overline{f(y)}=(K(x, y), f(x))_x. \tag{8.3'}$$

关于再生核的存在与唯一性有下面的两个定理。

定理 2.6　X 中再生核 K 存在的必要而且充分的条件为：对于任意的 $y_0\in\Omega$，存在和 $f\in X$ 无关的常数 C_{y_0}，使得

$$|f(y_0)|\leqslant C_{y_0}\cdot\|f\|,\ f\in X \tag{8.4}$$

成立，而且当这条件满足时，再生核 K 被唯一地确定。

証明（必要性） 对 $f(y_0)=(f(x),K(x,y_0))_x$ 应用 Schwarz 不等式(2.5)得

$$\begin{aligned}|f(y_0)|&\leqslant\|f\|\cdot(K(x,y_0),K(x,y_0))_x^{\frac{1}{2}}\\&=\|f\|\cdot K(y_0,y_0)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

（充分性） 由 Riesz 定理 2.5，在 X 中存在唯一的 $g_{y_0}(x)$，使得对于一切 $f\in X$，

$$f(y_0)=(f(x),g_{y_0}(x))_x. \tag{8.6}$$

因此，只需取 $K(x,y)=g_y(x)$ 就行了。

定理 2.6′ 如果 X 中再生核 K 存在，那么

$$\max_{\|f\|=1}|f(y_0)|=K(y_0,y_0)^{\frac{1}{2}}, \tag{8.7}$$

并且实际取这 max 的函数限于如下的函数

$$f_0(x)=\rho K(x,y_0)/K(y_0,y_0)^{\frac{1}{2}},\ \ |\rho|=1. \tag{8.8}$$

証明 由(8.5)的証明有 $\sup\limits_{\|f\|=1}|f(y_0)|\leqslant K(y_0,y_0)^{\frac{1}{2}}$。再由定理 1.2 的注，在 (8.5) 中等号成立仅限于 $f(x)=\lambda_0K(x,y_0)$ 的情形，其中 λ_0 为某常数。在此附加 $\|f\|=1$ 的条件就有

$$1=|\lambda_0|(K(x,y_0),K(x,y_0))_x^{\frac{1}{2}}=|\lambda_0|K(y_0,y_0)^{\frac{1}{2}},$$

即 $|\lambda_0|=K(y_0,y_0)^{-\frac{1}{2}}$，从而得 $f_0(x)=\rho K(x,y_0)/K(y_0,y_0)^{\frac{1}{2}}$。

Bergman 的核函数作为再生核之例 由 (4.2′) 和定理 2.6 可知 $A_2(R)$ 有再生核，我們將这再生核記为 $K_R(z,z')$，并称它为关于区域 R 的 **Bergman 核函数**。$K_R(z,z')$ 具有下面定理所显示的函数論的意义。

定理 2.7 設 R 为 z 平面上的单連通有界(开)区域，且 $z_0\in R$，

则由 Riemann 的共形映照定理，存在唯一的正则函数 $w=f_0(z;z_0)$，它将 R 一对一地映照到 w 平面的开圆 $|w|<\rho_R$ 上，同时满足

$$f_0(z_0;z_0)=0,\quad (df_0(z;z_0)/dz)_{z=z_0}=1. \tag{8.9}$$

这时 K_R 与 f_0 之間有关系

$$f_0(z;z_0)=K_R(z_0,z_0)^{-1}\int_{z_0}^{z} K_R(t,z_0)dt.$$

此地的綫积分乃是沿着在 R 内連結 z_0 到 z 的有长曲綫上取积分的。

証明 令所有在 R 内单值正则、且满足 $f'(z)\in A_2(R)$ 及

$$f(z_0)=0,\quad f'(z_0)=1 \tag{8.10}$$

的函数 $f(z)$ 的全体为 $\mathfrak{A}_2(R)$，对于 $\mathfrak{A}_2(R)$ 中的函数 $f(z)$，作

$$A_f=\iint_R |f'(z)|^2 dx\,dy=\|f'\|^2,\quad z=x+iy. \tag{8.11}$$

A_f 是借 $w=f(z)$ 将 R 映照于 w 平面内的象的面积(但 n 重映照着的地方是作为 n 倍来計算的)。这是因为若令

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

則由 Cauchy-Riemann 微分方程

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

得 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=u_xv_y-v_xu_y=u_x^2+u_y^2=|u_y+iv_x|^2=|f'(z)|^2$$

而有

$$A_f=\iint_R \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}dx\,dy$$

的緣故。

設 Riemann 映照函数 $w=f_0(z;z_0)$ 的逆函数为 $z=\varphi(w)$，那么和上面一样得着

$$dx\,dy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\,dv=|\varphi'(w)|^2 du\,dv$$

而有

$$A_f = \iint_{|w|<\rho_R} |f'(\varphi(w))|^2 \cdot |\varphi'(w)|^2 du\, dv, \quad w=u+iv. \qquad (8.12)$$

令 $F(w)=f(\varphi(w))$，则 $F'(w)=f'(\varphi(w))\varphi'(w)$，又在 $|w|<\rho_R$ 上由于(8.9)与(8.10)，$F(w)$ 的 Taylor 展开具有形式:

$$F(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty} c_n w^n, \qquad (8.13)$$

它是从 w 項开始的，从而用类似于得到(4.3)时所用的計算給出

$$A_f = \iint_{|w|<\rho_R} |F'(w)|^2 du\, dv = \iint_{|w|<\rho_R} \left|1+\sum_{n=2}^{\infty} nc_n w^{n-1}\right|^2 du\, dv$$

$$=\int_0^{\rho_R} dr \int_0^{2\pi} \left\{r+\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |c_n|^2 r^{2n-1}\right\} d\theta = \pi\rho_R^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \pi n |c_n|^2 \rho_R^{2n}.$$

因此当 $f(z)$ 在 $\mathfrak{A}_2(R)$ 中变动时 A_f 的最小値为 $\pi\rho_R^2$，而且这个最小値当 $F(w)=f(\varphi(w))=w$ 时，也就是当 $f(z)=f_0(z;z_0)$ 时被达到。

现在，如果对于每个 $f(z)\in\mathfrak{A}_2(R)$，令 $f(z)/\sqrt{A_f}=g(z)$，那么 $A_g=\|g'(z)\|=1$. 因为，如同上面所指出的，$A_f \geqslant A_{f_0}=\pi\rho_R^2$，所以在所有适合条件

$$g(z_0)=0, \quad g'(z_0)>0 \text{ 且 } \|g'(z)\|=1$$

的单値正則函数 $g(z)$ 中，使 $|g'(z)|$ 的値达到最大値 $1/\sqrt{A_{f_0}} =1/\sqrt{\pi}\rho_R$ 的，限于

$$g_0(z)=f_0(z;z_0)/\sqrt{A_{f_0}}=f_0(z;z_0)/\sqrt{\pi}\rho_R,$$

因此由定理 2.6′，

$$g_0'(z)=(\sqrt{\pi}\rho_R)^{-1}df_0(z;z_0)/dz=\lambda K_R(z,z_0)/K_R(z_0,z_0)^{\frac{1}{2}},$$
$$|\lambda|=1,$$

在此令 $z=z_0$，由(8.9)，

$$(\lambda\sqrt{\pi}\rho_R)^{-1}=K_R(z_0,z_0)/K_R(z_0,z_0)^{\frac{1}{2}}=K_R(z_0,z_0)^{\frac{1}{2}}.$$

从而得

$$df_0(z;z_0)/dz=K_R(z,z_0)/K_R(z_0,z_0).$$

§9 对于 Dirichlet 式范数的再生核

Green 的积分公式 設 R 为 E^2 中的有界区域，其境界曲綫 ∂R 由有限个光滑曲綫❶弧連結而成。今設实函数 $v(x)=v(x_1,x_2)$，$w(x)=w(x_1,x_2)$ 在 R 内属于 C^2，即具有二阶連續偏导函数，且 v，w 在閉区域 $R+\partial R$ 上属于 C^1，即 v，w 及 v_{x_1}，v_{x_2}，w_{x_1}，w_{x_2} 在閉区域 $R+\partial R$ 上連續，那么对于拉普拉斯算子

$$\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2=\Delta_x,$$

借分部积分可得

$$\iint_R v\cdot\Delta w dx_1dx_2+\int_{\partial R}v\frac{\partial w}{\partial\nu}ds=-\iint_R(v_{x_1}w_{x_1}+v_{x_2}w_{x_2})dx_1dx_2,\quad(9.1)$$

但 $\partial/\partial\nu$ 为在 ∂R 上沿着指向 R 内部的法綫方向的方向求导，ds 为 ∂R 上的弧长元素。由(9.1)，还成立

$$\iint_R(v\cdot\Delta w-w\cdot\Delta v)dx_1dx_2=-\int_{\partial R}\left(v\frac{\partial w}{\partial\nu}-w\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds.\quad(9.2)$$

$L_xu=\Delta u(x)-q(x)u(x)\,(q(x)>0)$ 的 Green 函数与 Neumann 函数 如 $q(x)$ 在 R 内属于 C^∞，即具有任意阶偏导函数，那么我們知道存在着 L_x 的 Green 函数 $G(x,y)$ 及 Neumann 函数 $N(x,y)$❷

$$\left.\begin{aligned}G(x,y)&=a(x,y)\log r(x,y)^{-1}+b(x,y),\quad a(x,x)=\frac{1}{2\pi},\\ N(x,y)&=a(x,y)\log r(x,y)^{-1}+c(x,y),\quad a(x,x)=\frac{1}{2\pi},\end{aligned}\right\}\quad(9.3)$$

❶ 即是具有連續变化的切綫的曲綫。

❷ 例如参看 G. F. D. Duff: Partial Differential Equations (Toronto, 1956), p. 157.

其中 $r(x, y)=((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$, 系数 a, b, c 当 $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ 含于 $R+\partial R$ 时属于 C^2, 且

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } y \text{ 固定时,作为 } x \text{ 的函数,在 } R \text{ 中,除 } y \text{ 点外有} \\ L_x G(x, y)=0, \quad L_x N(x, y)=0,\end{array}\right\} \tag{9.4}$$

又如 $y \in R$, 则当 $x \in \partial R$ 时有

$$G(x, y)=0, \quad \partial N(x, y)/\partial \nu=0. \tag{9.5}$$

$L_x u=0$ 的解的表示 今考察 $L_x u=0$ 的在 $R+\partial R$ 上属于 C^1 的解 $u(x)$. 在 R 内任意取定一点 $y^{(0)}$, 从 R 去掉以 $y^{(0)}$ 为中心、充分小的 ε 为半徑的圓以后所得的区域为 R_ε, 試在区域 R_ε 上視 $v(x)=G(x, y^{(0)})$, $w(x)=u(x)$ 来应用(9.2):

$$\iint_{R_\varepsilon}(v L_x w-w L_x v)\, dx_1\, dx_2=\iint_{R_\varepsilon}(v \cdot \Delta w-w \cdot \Delta v)\, dx_1\, dx_2$$

$$=-\int_{\partial R}\left(v \frac{\partial w}{\partial \nu}-w \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds-\int_{x_1^2+x_2^2=\varepsilon^2}\left(v \frac{\partial w}{\partial \nu}-w \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds.$$

上式的左边$=0$, 右边第一項$=\int_{\partial R} u \cdot \partial G(x, y^{(0)})/\partial \nu\, ds$. 又在 $y^{(0)}$ 为中心的圓周上的部分, 由于借极坐标 $r \exp(\sqrt{-1}\theta)$ 有 $\partial/\partial \nu=\partial/\partial r$, $ds=r\, d\theta$, 故当 $r \to 0$ 时($x \to y^{(0)}$ 时),

$$G(x, y^{(0)}) \approx(2\pi)^{-1} \log r^{-1}+b(y^{(0)}, y^{(0)}),$$

$$\partial G(x, y^{(0)})/\partial r \approx(\partial a(x, y^{(0)})/\partial r) \log r^{-1}$$
$$-(2\pi)^{-1} r^{-1}+\partial b(x, y^{(0)})/\partial r.$$

利用此关系,当 $\varepsilon \to 0$ 时上式右边第二項的极限

$$=-(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} u(y^{(0)})\, d\theta=-u(y^{(0)}),$$

从而当我們用 ν_x 表示 ∂R 上点 x 的内法綫,用 s_x 表示弧长时,

$$u(y)=\int_{\partial R} u(x) \cdot \partial G(x, y)/\partial \nu_x \cdot ds_x. \tag{9.6}$$

因此,給定了在 ∂R 上 u 的边值 $f(x)$ 后, $L_x u=0$ 的 Dirichlet 問

題的解❶ $u(x)$ 可由下式給出：

$$u(x)=\int_{\partial R} f(y)\partial G(y,\ x)/\partial\nu_y ds_y. \tag{9.7}$$

同样地也可得到

$$u(y)=-\int_{\partial R} N(x,\ y)\cdot\partial u(x)/\partial\nu_x\cdot ds_x. \tag{9.8}$$

因此，給定了在 ∂R 上 $\partial u/\partial\nu_x$ 的值 $g(x)$，求解 $L_x u=0$ 的 Neumann 問題时，它的解 $u(x)$ 由

$$u(x)=-\int_{\partial R} N(y,\ x)\cdot g(y)\cdot ds_y \tag{9.9}$$

給出。

Green 函数及 Neumann 函数的对称性

$$G(x,\ y)=G(y,\ x),\quad N(x,\ y)=N(y,\ x) \tag{9.10}$$

可如下証明：以 R 的点 y, z 为中心各作半徑 ε 的圓 $S(y;\ \varepsilon)$, $S(z;\ \varepsilon)$。在从 R 去掉这两圓的区域内，視 $v(x)=G(y,\ x)$, $w(x)=G(z,\ x)$ 而应用(9.2)

$$\iint_{R-S(y;\ \varepsilon)-S(z;\ \varepsilon)}(v\cdot L_x w-w\cdot L_x v)\,dx_1\,dx_2$$

$$=\iint_{R-S(y;\ \varepsilon)-S(z;\ \varepsilon)}(v\cdot\Delta w-w\cdot\Delta v)\,dx_1\,dx_2$$

$$=-\int_{\partial R}\left(v\frac{\partial w}{\partial\nu}-w\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds-\int_{y_1^2+y_2^2=\varepsilon^2}\left(v\frac{\partial w}{\partial\nu}-w\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds$$

$$-\int_{z_1^2+z_2^2=\varepsilon^2}\left(v\frac{\partial w}{\partial\nu}-w\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds.$$

左边$=0$，右边第一項也$=0$。又右边第二、第三項和(9.6)的导出一样，当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$=-w(y)+v(z)=-G(z,\ y)+G(y,\ z),$$

从而得 $G(z,\ y)=G(y,\ z)$。同样可得 $N(y,\ z)=N(z,\ y)$。

---

❶ 如果存在的話。——譯者注

Dirichlet 式范数的再生核 由 $G(x, y)$ 的对称性与(9.6)，对于 $L_x u=0$ 的在 $R+\partial R$ 上属于 C^1 的解 $u(x)$ 有

$$u(x)=\int_{\partial R} u(y)\cdot\partial G(x, y)/\partial\nu_y\cdot ds_y, \tag{9.11}$$

同样有

$$u(x)=-\int_{\partial R} N(x, y)\cdot\partial u(y)/\partial\nu_y\cdot ds_y. \tag{9.12}$$

可是由 $N(x, y)$ 的对称性与(9.5)(在 ∂R 上的点 y, $\partial N(x, y)/\partial\nu_y=0$)得到

$$0=\int_{\partial R} u(y)\cdot\partial N(x, y)/\partial\nu_y\cdot ds_y. \tag{9.13}$$

从(9.11)减(9.13)便知

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于 } L_x u=0 \text{ 的解 } u(x) \text{ 有}\\ \qquad u(x)=-\int_{\partial R} u(y)\cdot\partial K(x, y)/\partial\nu_y\cdot ds_y,\\ \text{于此 } K(x, y)=N(x, y)-G(x, y).\end{array}\right\} \tag{9.14}$$

由(9.3)立刻看出，当 $x, y\in R+\partial R$ 时，核 $K(x, y)$ 属于 C^2. 这是因为 G 的奇怪项 $a\log r^{-1}$ 与 N 的奇性项 $a\log r^{-1}$ 相减之后奇性消失掉的緣故。所以利用(9.1)与(9.14),

$$\iint_R u(y)\cdot\Delta_y K(x, y)\,dy_1\,dy_2-u(x)$$

$$=-\iint_R\left(u_{y_1}\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_1}+u_{y_2}\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_2}\right)dy_1\,dy_2.$$

由两边减去 $\iint_R u(y)\cdot q(y)K(x, y)\,dy_1dy_2$, 并注意 $L_y K(x, y)=0$,

$$\left.\begin{array}{l}u(x)=E(K(x, y), u(y)), \text{ 但}\\ E(v(y), w(y))=\iint_R(v_{y_1}w_{y_1}+v_{y_2}w_{y_2}+q(y)vw)\,dy_1dy_2,\end{array}\right\} \tag{9.15}$$

这样便得到下面的定理。

定理2.8 关于 Dirichlet 式的内积 $E(v(y), w(y))$，核 $K(x, y)=N(x, y)-G(x, y)$，对于 $L_x u=\Delta_x u-q(x)u=0$ 的在 R 属于 C^2，在 $R+\partial R$ 属于 C^1 的解 $u(x)$ 起着再生核的作用。

再生核在 Dirichlet 問題上的应用　現在来試解給定了在 ∂R 上 $u(x)$ 的边値 $f(x)$ 后，$L_x u=0$ 的 Dirichlet 問題。对于以 $f(x)$ 为边値而在 $R+\partial R$ 上属于 C^1 的任意函数 $F(x)$，由 (9.1) 有

$$E(K(x,y), F(y))=-\iint_R F(y)\{\Delta_y K(x,y)-q(y)K(x,y)\}dy_1 dy_2$$
$$-\int_{\partial R} f(y)\cdot\partial K(x, y)/\partial\nu_y\cdot ds_y.$$

右边第一項由于积分內的因子 $\{\quad\}=0$，而整个积分为 0. 由 (9.14)，右边第二項就是所求 Dirichlet 問題的解 $u(x)$。故所求解 $u(x)$ 为

$$u(x)=E(K(x, y), F(y)). \tag{9.16}$$

再生核在 Neumann 問題上的应用　如果在 (9.2) 中令 $v(x)=K(y, x)$，$w(x)=u(x)$ ($L_x u=0$ 的解)，那么

$$\iint_R (K(y, x)L_x u(x)-u(x)L_x K(y, x))\,dx_1 dx_2$$
$$=\iint_R (K(y, x)\Delta_x u(x)-u(x)\Delta_x K(y, x))\,dx_1 dx_2$$
$$=-\int_{\partial R}\left(K(y, x)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_x}-u(x)\frac{\partial K(y, x)}{\partial\nu_x}\right)ds_x$$

的左边$=0$. 又右边由于 (9.14) 而

$$=-\int_{\partial R} K(y, x)\frac{\partial u}{\partial\nu_x}ds_x-u(y).$$

从而，給定了在 ∂R 上 $\partial u/\partial\nu_x$ 的値 $g(x)$ 后，$L_x u=0$ 的 Neumann 問題的解 $u(x)$ 也可借再生核 $K(x, y)$ 表示为

$$u(x) = -\int_{\partial R} g(y)\cdot K(x, y)\cdot ds_y. \qquad (9.17)$$

$L_x u=0$ 的解空間的完备性 $L_x u=0$ 的所有在 R 上属于 C^2，在 $R+\partial R$ 属于 C^1 的解 $u(x)$ 的全体按 Dirichlet 式的范数 $\|u\|=E(u, u)^{\frac{1}{2}}$ 形成一个賦范空間 $S(L_x)$。在定理2.8里，我們在不曾証明这賦范空間的完备性之前已求出了再生核 $K(x, y)$。如果利用这表示定理，那么賦范空間 $S(L_x)$ 的完备性(从而成为 Hilbert 空間)可如下証明：

設 $u_n(x)\in S(L_x)$ 滿足 Cauchy 收斂条件 $\lim\limits_{n,m}\|u_n-u_m\|=0$，因为

$$u_n(x)-u_m(x)=E(K(x, y), u_n(y)-u_m(y)),$$

由 Schwarz 不等式得

$$|u_n(x)-u_m(x)|\leqslant\|K(x, y)\|_y\cdot\|u_n(y)-u_m(y)\|,$$

在此 $\|K(x, y)\|_y$ 是把 $K(x, y)$ 当作 y 的函数而作的 Dirichlet 式范数 $E(K(x, y), K(x, y))^{\frac{1}{2}}$。从而 $\{u_n(x)\}$ 在 R 中一致收斂。同样因为

$$\partial(u_n(x)-u_m(x))/\partial x_i=E(\partial K(x, y)/\partial x_i, u_n(y)-u_m(y)),$$

$\{\partial u_n/\partial x_i\}$ 显然也在 R 中一致收斂。又对于 $\{\partial^2 u_n/\partial x_i\partial x_j\}$ 也是如此。从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)=u(x)$ 在 $R+\partial R$ 上属于 C^2，而且有 $\partial u/\partial x_i=\lim\limits_{n\to\infty}\partial u_n/\partial x_i$，$\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j=\lim\limits_{n\to\infty}\partial^2 u_n/\partial x_i\partial x_j$。因此在方程 $L_x u_n=0$ 中，让 $n\to\infty$ 便得 $L_x u=0$。

注 即使不求 Green 函数或 Neumann 函数也可直接求出再生核 $K(x, y)$。关于此可参見 S. Bergman: Kernel functions and differential equations (New York, 1953)，275 頁以后。

第3章　正交系，基底

随着 Fourier 級数論的产生，开始有了将任意函数"按正交函数系展开"的展开法，它不同于和解析函数有联系的 Taylor 展开。这样可說是在函数空間中引入了正交坐标，而作为这展开法的基础的乃是 Bessel 不等式以及体現正交系的完全性的 Parseval 等式。如果采用正交坐标系的思想，那么抽象的(可分) Hilbert 空間可借具体的数列空間(l_2)来表示，此外再生核也可具体的作出来。

§10 Schmidt 的正交化

綫性独立　矢量空間的元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 叫做**綫性独立**是指当系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 不全为 0 时，綫性組合 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i \neq 0$。反之，如适当的选取不全为 0 的系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 可使 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i = 0$，便称矢量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为**綫性相关**。

就范正交系　pre-Hilbert 空間 X 的子集 $\{x_\alpha\}$ 满足关系

$$(x_\alpha, x_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha=\beta, \\ 0 & \alpha\neq\beta \end{cases} \tag{10.1}$$

时，$\{x_\alpha\}$ 叫做**就范正交系**(orthonormal system)。

定理 3.1(E. Schmidt)　設 pre-Hilbert 空間 X 的有限个或可数个的元 $\{\psi_i\}$ 是綫性独立的——即从 $\{\psi_i\}$ 中取出的任何有限个总是綫性独立的，这时可作出这样的就范正交系 $\{\varphi_i\}$，使得

$$\left.\begin{array}{l}\text{每个 } \varphi_i \text{ 都是 } \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_i \text{ 的綫性組合，且} \\ \text{每个 } \psi_i \text{ 都是 } \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_i \text{ 的綫性組合。}\end{array}\right\} \tag{10.2}$$

証明　依次作

$$\varphi_1=\psi_1/\|\psi_1\|,$$

$$\varphi_2=(\psi_2-(\psi_2,\ \varphi_1)\varphi_1)/\|\psi_2-(\psi_2,\ \varphi_1)\varphi_1\|,$$

……

$$\varphi_n=(\psi_n-\sum_{m=1}^{n-1}(\psi_n,\ \varphi_m)\varphi_m)/\|\psi_n-\sum_{m=1}^{n-1}(\psi_n,\ \varphi_m)\varphi_m\|.$$

……

根据$\{\psi_i\}$是綫性独立的假定，$\psi_1\neq0$，因此$\|\psi_1\|\neq0$而φ_1有意义。同样作φ_2时，所用的分母$\neq0$的原因可由ψ_1与ψ_2是綫性独立的假定看出。仿此，由于φ_2是ψ_2与φ_1也就是ψ_2与ψ_1的綫性組合，故ψ_3不能表为φ_1与φ_2的綫性組合，从而定义ψ_3时的分母不为 0. 以下重复这种論法便知定义φ_n时的分母也不为 0.

$\{\varphi_i\}$为就范正交系的証明　首先$\|\varphi_i\|=1$是显然的；其次由于显然有$(\varphi_2,\ \varphi_1)=0$，故$(\varphi_3,\ \varphi_1)=0$. 从而又有$(\varphi_4,\ \varphi_1)=0$，仿此依次得$(\varphi_5,\ \varphi_1)=0,\ \cdots,\ (\varphi_n,\ \varphi_1)=0$. 从$(\varphi_2,\ \varphi_1)=0$又有$(\varphi_3,\ \varphi_2)=0$，以下依次得$(\varphi_4,\ \varphi_2)=0,\ \cdots,\ (\varphi_n,\ \varphi_2)=0$. 仿此終于也可得$(\varphi_i,\ \varphi_j)=0\ \ (i>j)$.

最后，由于φ_i的作法，(10.2)是显然的.

作为正交化之例的 Legendre 多項式　将$-1\leqslant t\leqslant1$上綫性独立的

$$1,\ t,\ t^2,\ \cdots,\ t^n,\ \cdots$$

在$L_2(-1,\ 1)$中予以正交化，便得到由 Legendre 多項式$P_n(t)$的正数倍

$$p_{n,Le}(t)=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}P_n(t)=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \quad (10.3)$$

所組成的就范正交系$\{p_n(t)\}$.

証明　令$(t^2-1)^n=F(t)$，并設$Q(t)$为不高于$(n-1)$次的多項式，那么由于$Q^{(n)}(t)\equiv0$，通过分部积分得

$$\int_{-1}^{1}Q(t)F^{(n)}(t)\,dt=\Big[QF^{(n-1)}-Q'F^{(n-2)}+\cdots\pm Q^{(n-1)}F\Big]_{-1}^{1}=0.$$

因此由 1, t, …, t^n 的綫性組合所成的 n 次多項式 $p_n(t)$ 滿足正交条件 $(p_n, p_m)=0$ $(n\neq m)$。至于就范条件 $(p_n, p_n)=1$ 的滿足可参見(例如)高木貞治：解析概論，137 頁❶。

Hermite 多项式及 Laguerre 多項式 和上面相仿，在 $L_2(-\infty, \infty)$ 中將

$$e^{-t^2/2},\ te^{-t^2/2},\ \cdots,\ t^n e^{-t^2/2},\ \cdots$$

正交化，便得到由 Hermite 多項式 $H_n(t)$ 的正数倍

$$\begin{aligned} p_{n,H}(t) &= (2\pi)^{-1/4}(n!)^{-1/2}H_n(t) \\ &= (2\pi)^{-1/4}(n!)^{-1/2}(-1)^n e^{t^2/2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2/2}) \end{aligned} \tag{10.4}$$

所組成的就范正交系。又在 $L_2(0, \infty)$ 中將

$$e^{-t/2},\ te^{-t/2},\ \cdots,\ t^n e^{-t/2},\ \cdots$$

正交化，便得到由 Laguerre 多項式 $L_n(t)$

$$p_{n,La}(t)=L_n(t)=(n!)^{-1}e^{x}\cdot\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}\cdot t^n) \tag{10.5}$$

所組成的就范正交系。

§11 Bessel 不等式，Parseval 等式

定理 3.2 如果 $\{\varphi_i\}$ 是 pre-Hilbert 空間 X 的就范正交系，那么对于任意的 $f\in X$，**Bessel 不等式**

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(f, \varphi_i)|^2\leqslant\|f\|^2 \tag{11.1}$$

成立。

証明 如記 $(f, \varphi_i)=f_i$——称 f_i 为 f 关于 $\{\varphi_i\}$ 的 Fourier 式系数，則对任意的常数 α_i 有

---

❶ 这里只証明了 $\{p_n\}$ 成为就范正交系，尚需說明 $\{p_n\}$ 是由 $\{t^n\}$ 正交化而得。事实上，显然 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 是 $1, t, \cdots, t^n$ 的綫性組合；又因为 $p_0, \cdots, p_n$ 是就范正交的，所以它們是綫性独立的，因此易知 $1, t, \cdots, t^n$ 是 $p_0, \cdots, p_n$ 的綫性組合。——校者注

$$\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\|^2=(f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i,\ f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i)$$

$$=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i f_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{f}_i+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2.$$

所以

$$\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-f_i|^2\quad (f_i=(f,\ \varphi_i)).\tag{11.2}$$

由此

$$0\leqslant\|f-\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\quad (f_i=(f,\ \varphi_i)).\tag{11.3}$$

系 当 X 为 Hilbert 空間时，如 $n>m$，則和上面同样地得到 $\|\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i-\sum_{i=1}^{m}f_i\varphi_i\|^2=\sum_{i=m+1}^{n}|f_i|^2$，由是可知 f 关于 $\{\varphi_i\}$ 的 Fourier 式級数

$$\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i\quad (f_i=(f,\ \varphi_i))\tag{11.4}$$

收斂，而且

$$\|f-\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2\tag{11.5}$$

成立。f_i 称为 f 关于 $\{\varphi_i\}$ 的第 i 个 **Fourier 式系数**。

Parseval 等式，完全就范正交系 等式

$$\|f-\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i\|^2=0,\ \text{即}\ \|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2\tag{11.6}$$

称为 **Parseval 等式**。当对于一切的 $f\in X$，(11.6)都成立，从而

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i\quad (f_i=(f,\ \varphi_i))\tag{11.7}$$

对一切 $f\in X$ 都成立时，就范正交系 $\{\varphi_i\}$ 称为**完全系**。

完全就范正交系的例

例 1 由 Weierstrass 的多項式近似定理❶，对于在 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 上連續的任何函数 $c(t)$ 与任何 $\varepsilon>0$ 总可选取多項式 $p^{(\varepsilon)}(t)$，使得 $\sup_{-1\leqslant t\leqslant 1}|c(t)-p^{(\varepsilon)}(t)|$

❶ 高木貞治：解析概論，327 頁。

$\leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}}$。又由 Lebesgue 积分的定义，对于任何 $f \in L_2(-1, 1)$ 与任何 $\varepsilon > 0$，总可选取在 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 上連續的函数 $c(t)$ 使得 $\int_{-1}^{1} |f(t) - c(t)|^2 dt \leqslant \varepsilon$。因为 $p^{(\varepsilon)}(t)$ 可表为 (10.3) 的綫性組合，故最后总可选取系数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 使得

$$\|f(t) - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n p_{n,Le}(t)\|^2 \leqslant (\|f - c\| + \|c - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n p_{n,Le}\|)^2$$
$$\leqslant (\varepsilon^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}})^2 \leqslant 9\varepsilon.$$

因此，設 f_n 为 f 关于 $\{p_{n,Le}(t)\}$ 的 Fourier 式系数，则由 (11.2) 得

$$\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{m} |f_i|^2 \leqslant \|f - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_{i,Le}\|^2 \leqslant 9\varepsilon,$$

可見 $\{p_{n,Le}(t)\}$ 在 $L_2(-1, 1)$ 中构成完全就范正交系。

例 2 三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \cdots, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \cdots \quad (11.8)$$

在 $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ 上构成就范正交系。一方面，对于以 2π 为周期的任何連續函数 $c(t)$ 与任何 $\varepsilon > 0$，总可适当地选取 (11.8) 的綫性組合 $p^{(\varepsilon)}(t)$，使得 $\sup_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |c(t) - p^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant (\varepsilon(2\pi)^{-1})^{\frac{1}{2}}$❶。另一方面，对于任意的 $f \in L_2(-\pi, \pi)$，由 Lebesgue 积分的定义，总可选取周期为 2π 的連續函数 $c(t)$，使得 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - c(t)|^2 dt \leqslant \varepsilon$。因此，和例 1 同样，可知 (11.8) 在 $L_2(-\pi, \pi)$ 中构成完全就范正交系。

此外，也可以証明 Hermite 函数系 (10.4) 在 $L_2(-\infty, \infty)$ 中和 Laguerre 函数系 (10.5) 在 $L_2(0, \infty)$ 中分别构成完全就范正交系❷。

可分賦范空間 如果在賦范空間中存在着可数个元 $\{\chi_i\}$，使得对于 X 的任何元 f 与任何 $\varepsilon > 0$，总可在 $\{\chi_i\}$ 中找到滿足 $\|f - \chi_{i_0}\| \leqslant \varepsilon$ 的 χ_{i_0}，也就是說使得 $\{\chi_i\}$ 在 X 中稠密 (dense)，那末 X 叫做**可分** (separable) 的。

可分 Hilbert 空間之例

例 1 $L_2(\alpha, \beta)$ 是可分的。首先，設 $-\infty < \alpha < \beta < \infty$，那么对于任何 $f \in L_2(\alpha, \beta)$ 与任何 $\varepsilon > 0$，由 Weierstrass 的多项式近似定理总可选多项式 $p^{(\varepsilon)}(t)$ 使得 $\|f - p^{(\varepsilon)}\| \leqslant \varepsilon$。由于所有系数的实部和虚部为有理数的多项式，其

❶ 高木貞治：解析概論，317 頁。

❷ 参閱 G. Szegö: Orthogonal Polynomials (New York, 1939).

全体是可数的，只需取这些多项式全体作为$\{\chi_i\}$就可以了。其次，对于任何$f\in L_2(-\infty,\infty)$与任何$\varepsilon>0$，取n充分大就有$\int_{|t|>n}|f(t)|^2dt<\varepsilon^2$。但因$L_2(-n,n)$是可分的，故在$L_2(-n,n)$内存在可数个元$\{g_i^{(n)}\}_{i=1,2,\cdots}$在$L_2(-n,n)$稠密。在此令

$$\psi_i^{(n)}(t)=\begin{cases}g_i^{(n)}(t) & 当|t|\leqslant n,\\ 0 & 当|t|>n,\end{cases}$$

那么，由于

$$\|f-\psi_i^{(n)}\|^2=\int_{-n}^{n}|f(t)-g_i^{(n)}(t)|^2dt+\int_{|t|>n}|f(t)|^2dt,$$

如果取n充分大，依此再适当地取i，总可使右边成为任意小。

同样也可証明$L_2(\alpha,\beta)$的可分性。

例 2 $H_k(E^m)$是可分的。同样，$H_k(R)$也是可分的。

証明 兹就$H_k(E^m)$来証明。由于$f\in\mathfrak{D}^\infty(E^m)$的支集是$E^m$的有界閉集，只要整数$n$取得充分大，在$|x|\geqslant n$就有$f(x)=0$。对于这样的$f(x)$与任意的$\varepsilon>0$，必可适当地选多项式$p(x)=p(x_1,\cdots,x_m)$，使得

$$\left.\begin{array}{ll}只要|s|=\sum_{i=1}^m s_i\leqslant k,\ 对于 D^{(s)}=\partial^{s_1+\cdots+s_m}/\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_m^{s_m}\\ 都有\qquad \sup_{|x|\leqslant n}|D^{(s)}f(x)-D^{(s)}p(x)|\leqslant\varepsilon.\end{array}\right.\tag{11.9}$$

这事实的証明后面再补述。由这事实立即得

$$\|f-p\|_{k,n}=\left(\sum_{|s|\leqslant k}\int_{|x|\leqslant n}|D^{(s)}f(x)-D^{(s)}p(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(\text{适合 }|s|\leqslant k\text{ 的 }s\text{ 的个数})\times\varepsilon\times\int_{|x|\leqslant n}dx.\tag{11.9'}$$

系数全是有理数的m元多项式的全体是可数的，設它們为$\{p_i(x)\}_{i=1,2,\cdots}$，对于每个$p_i(x)$与正整数$n$，$j$，在滿足

$$\|f-p_i\|_{k,n}\leqslant j^{-1}$$

(而且其支集含于$\|x\|\leqslant n$——譯者)的$f\in\mathfrak{D}^\infty(E^m)$中定出一个$f_{i,n,j}$。这可数个$\{f_{i,n,j}\}$在范数$\|\ \|_k$的意义下稠密于$\mathfrak{D}^\infty$，由(11.9')显然可見，从而$H_k(E^m)$是可分的。

(11.9)的証明。为簡单起見就$m=2$来証明。对$f(x,y)\in\mathfrak{D}^\infty(E^2)$考察

$$\left.\begin{array}{ll}F(x,y,t)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^2\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)e^{-(4t)^{-1}((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)}d\xi d\eta & t>0\\ =f(x,y) & t=0\end{array}\right\}\tag{11.10}$$

通过变数变换 $\xi_1=(\xi-x)/2\sqrt{t}$，$\eta_1=(\eta-y)/2\sqrt{t}$，

$$F(x,y,t)=\pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+2\xi_1\sqrt{t},\ y+2\eta_1\sqrt{t})e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}d\xi_1d\eta_1.$$

因此，利用 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}d\xi_1d\eta_1=\pi$ 得到

$$\begin{aligned}&|F(x,y,t)-f(x,y)|\\&\leqslant\pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+2\xi\sqrt{t},\ y+2\eta\sqrt{t})-f(x,y)|e^{-\xi^2-\eta^2}d\xi d\eta\\&\leqslant\pi^{-1}\Big\{\iint_{\xi^2+\eta^2\geqslant T^2}+\iint_{\xi^2+\eta^2\leqslant T^2}\Big\}.\end{aligned}$$

由于 f 有界且 $e^{-\xi^2-\eta^2}$ 可积，右边第一项当 $T\to\infty$ 时一致 $\to0$，又由于 $f(x,y)$ 的一致連續性，对于固定的 T，右边第二項当 $t\downarrow0$ 时关于 (x,y) 一致 $\to0$。

又由于 f 的支集是有界閉集，通过分部积分容易得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n_1+n_2}F(x,y,t)}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}}&=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{n_1+n_2}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n_1}\partial\eta^{n_2}}e^{-(4t)^{-1}((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)}d\xi d\eta &&(t>0\text{ 时})\\&=\frac{\partial^{n_1+n_2}f(x,y)}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}}. &&(t=0\text{ 时})\end{aligned}$$

这里用到

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}e^{-((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)/4t}}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}}=(-1)^{n_1+n_2}\frac{\partial^{n_1+n_2}e^{-((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)/4t}}{\partial\xi^{n_1}\partial\eta^{n_2}}.$$

因此，和上面一样，可知当 $t\downarrow0$ 时，关于 (x,y) 一致地

$$\partial^{n_1+n_2}F(x,y,t)/\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}\to\partial^{n_1+n_2}f(x,y)/\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}.$$

另一方面，$F(x,y,t)$，$t>0$ 中的 x, y 即使是复变数(11.10)也有意义，而且它即使作为复变数 x, y 的函数也是偏微分可能的，这从 f 是有界函数的事实不难明白。从而 $F(x,y,t)$，$t>0$ 在 $|x|<\infty$，$|y|<\infty$ 是复变数 x, y 的正則函数。因此对于任意的 $n>0$，在 $|x|^2+|y|^2\leqslant n^2$ 絕对且一致收斂的 Taylor 展开

$$F(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}C_k(t)x^ky^{m-k},$$

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}F(x,y,t)}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}C_k(t)\frac{\partial^{n_1+n_2}x^ky^{m-k}}{\partial x^{n_1}\partial y^{n_2}}$$

是可能的。

綜上所述，只需先取充分小的正数 t_i，再对这 t_i 取 $F(x,y,t_i)$ 的 Taylor 展开的足够多项的部分和，这样得到的多项式 $p(x)$ 必然满足(11.9)。

証毕

同样可知 Dirichlet 式賦范空間是可分的。至于 $A_2(R)$ 的可分性稍后再予証明(§12)。

定理 3.3 对于可分 Hilbert 空間 X，一定可以作出元素列 $\{\varphi_i\}$ 成为它的完全就范正交系。

証明 設 $\{\chi_i\}$ 由至多可数个元組成，并在 X 中稠密。假如 χ_{i_0} 可表为 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{i_0-1}$ 的綫性組合，便将 χ_{i_0} 从 $\{\chi_i\}$ 中删去，继續这种运算，可作出至多由可数个元組成的 $\{\psi_n\}$，使得 $\{\psi_n\}$ 是綫性独立的而且任何 χ_i 可表为有限个 ψ_n 的綫性組合。

今按定理 3.1 由 $\{\psi_n\}$ 作就范正交系 $\{\varphi_n\}$，那么 $\{\varphi_n\}$ 便是完全系。事实上，对于任意的 $f\in X$ 与任意的 $\varepsilon>0$，存在 χ_i 满足 $\|f-\chi_i\|\leqslant\varepsilon$。因为 χ_i 可表为有限个 ψ 的，从而也是有限个 φ 的綫性組合，自然存在系数 α_i 滿足

$$\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\|^2\leqslant\varepsilon^2.$$

因此，对于 $f_i=(f, \varphi_i)$ 由 (11.2) 有

$$\|f-\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i\|^2\leqslant\|f-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\|^2\leqslant\varepsilon^2.$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，(11.6) 必成立。

可分 Hilbert 空間的具体表示 让我們按 X 的一个完全就范正交系 $\{\varphi_i\}$[1] 将 $f\in X$ 予以 Fourier 式展开：$f=\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i$。对于每个 $f\in X$，令数列 $\{f_i\}$ 和它对应，那么

$$\left.\begin{array}{l}\text{如 } f\to\{f_i\},\ g\to\{g_i\}\ (\text{但 } g_i=(g, \varphi_i))\text{，則}\\ \alpha f+\beta g\to\{\alpha f_i+\beta g_i\}\text{，且由 Parseval 等式(11.6)有}\\ \|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2;\end{array}\right\}\qquad(11.11)$$

反之，对于满足 $\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2<\infty$ 的 $\{f_i\}$，作

---

[1] 这里假設 $\{\varphi_i\}$ 为可数无限集。若 $\{\varphi_i\}$ 中只含有有限个(例如 m 个)，則 X 与下面所說的 $(l_2(m))$ 同构。——校者注

$$f^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} f_i\varphi_i,$$

那么由于$\{\varphi_i\}$的就范正交性，当$n>m$时，

$$\|f^{(n)}-f^{(m)}\|^2=\|\sum_{i=m+1}^{n} f_i\varphi_i\|^2=\sum_{i=m+1}^{n}|f_i|^2.$$

从而$\{f^{(n)}\}$在完备的X里满足 Cauchy 收斂条件，因此，設$f=\lim_{n\to\infty} f^{(n)}$，那么由內积的連續性有

$$(f, \varphi_i)=\lim_{n\to\infty}(f^{(n)}, \varphi_i)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j\varphi_j, \varphi_i\right)=f_i.$$

这就是說，对于满足$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2<\infty$的$\{f_i\}$，存在着恰好以$f_i$为其第$i$个 Fourier 式系数的$f\in X$。

不仅如此，由于$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2$，对应$f\to\{f_i\}$还是一对一的。

这样一来，所有满足$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2<\infty$的这种数列$\{f_i\}$的全体按照算法

$$\alpha\{f_i\}+\beta\{g_i\}=\{\alpha f_i+\beta g_i\}, \quad \|\{f_i\}\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2,$$

如同(11.11)所示，形成一个和X同构的 Hilbert 空間(l_2)[1]。再者，由m个数所成有序組$\{f_1, \cdots, f_m\}$的全体按照上面算法看作是 Hilbert 空間时也有記为$(l_2(m))$的。

§12 再生核的具体表示，Bergman 核函数的具体表示

定理 3.4 如果具有再生核$K(x, y)$的 Hilbert 空間X是可分的，那么对于X的任何完全就范正交系$\{\varphi_i(x)\}$，

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}\text{关于每个 } x, y \text{ 收斂而且}=K(x, y),\\&\text{同时}\lim_{n\to\infty}\|K(x, y)-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}\|_x=0.\end{aligned}\right\}\quad(12.1)$$

[1] (l_2)既和X同构，必也满足条件(2.10)，故也是內积空間。——譯者注

証明 由于 $K(x, y)$ 是再生核，作为 x 的函数时，$K(x, y)$ 的 Fourier 式系数依(8.3′)为

$$(K(x, y), \varphi_i(x))_x = \overline{\varphi_i(y)}.$$

因此(12.1)的后半得証。

就一般具有再生核 $K(x, y)$ 的 X 来説，

$$\left.\begin{array}{l} \text{如果 } \lim\limits_{n\to\infty}\|f(x)-f_n(x)\|_x=0, \\ \text{則关于每个 } x \text{ 有 } \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), \end{array}\right\} \quad (12.2)$$

这是因为依 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} |f_n(x)-f(x)| &= |(f_n(y)-f(y), K(y, x))_y| \\ &\leqslant \|f_n(y)-f(y)\|_y \cdot (K(y,x), K(y,x))_y^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f_n-f\| \cdot K(x,x)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

的緣故。所以由(12.1)的后半即可証明前半。

Bergman 核函数的具体表示 因为 $A_2(R)$ 的完全航范正交系 $\{\varphi_i(z)\}$ 可以照下面的方式作出，故由前定理，$A_2(R)$ 的再生核即 Bergman 的核函数的具体表示自然也可得到。

$$\left.\begin{array}{l} \text{任取一点 } z_0\in R, \text{在属于 } A_2(R) \text{ 的函数 } g(z) \text{ 中，凡满足} \\ g(z_0)=0,\ g'(z_0)=0,\ \cdots,\ g^{(n-1)}(z_0)=0,\ g^{(n)}(z_0)=1 \end{array}\right\} (12.3)$$

的这种 $g(z)$ 的全体記为 $F^{(n)}(n=0, 1, \cdots)$。由于 $(z-z_0)^n/n!$ 满足(12.3)，可知 $F^{(n)}$ 不是空集。在 $F^{(n)}$ 中满足

$$\|g_n\| = \inf_{g\in F^{(n)}}\|g\| \quad (\text{設} = m^{(n)}) \tag{12.4}$$

的 $g_n(z)$ 唯一存在。以此所作的

$$\{\varphi_n(z)\}_{n=1,2,\cdots};\quad \varphi_n(z) = g_{n-1}(z)/\|g_{n-1}\| \tag{12.5}$$

是 $A_2(R)$ 的完全航范正交系。

証明 由于 $F^{(n)}$ 是凸集合，和在定理 2.2 的証明中一样，如果适当地选取 $F^{(n)}$ 的函数列 $\{h_j(z)\}$，对于满足(12.4)的某函数 $g_n(z)\in A_2(R)$ 有

$$\lim_{j\to\infty}\|g_n(z)-h_j(z)\|^2=\lim_{j\to\infty}\iint_R|g_n(z)-h_j(z)|^2dxdy=0.$$

但因对于正则函数$f(z)$成立着(4.2′)，故利用上式，在含于R内部的任意閉圓$|z-z_1|\leqslant\delta$上一致地有$\lim_{j\to\infty}h_j(z)=g_n(z)$。从而根据关于正則函数列的逐項微分定理也有$\lim_{j\to\infty}h_j^{(k)}(z_1)=g_n^{(k)}(z_1)$，令$z_1=z_0$便知随着各个$h_j(z)$，$g_n(z)$也滿足(12.3)，这就是說$g_n(z)\in F^{(n)}$。

其次，我們指出

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果} f(z)\in A_2(R),\ \text{且} f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(n)}(z_0)=0,\\ \text{那么}\ (f,\ g_n)=0.\end{array}\right\}\tag{12.6}$$

对于任何常数α，由于$g_n(z)+\alpha f(z)\in F^{(n)}$，

$$\begin{aligned}(m^{(n)})^2\leqslant\|g_n+\alpha f\|^2&=(g_n+\alpha f,\ g_n+\alpha f)\\&=(m^{(n)})^2+\alpha(f,\ g_n)+\bar{\alpha}(g_n,\ f)+|\alpha|^2\|f\|^2.\end{aligned}$$

在这里如果$\|f\|\neq0$，那么，可取$\alpha=-(g_n,\ f)/\|f\|^2$，得到

$$0\leqslant-|(g_n,\ f)|^2/\|f\|^2,$$

从而$(g_n,\ f)=0$。如果$\|f\|=0$，那么当然$(g_n,\ f)=0$。于是(12.6)得証。

由上面也可以看出$g_n(z)$是唯一确定的。事实上，假如$g_n^*(z)\in F^{(n)}$且$\|g_n^*\|=m^{(n)}$，那么由于$g_n(z)-g_n^*(z)=f(z)$滿足(12.6)的条件，故$(f,\ g_n)=0$，同理也有$(f,\ g_n^*)=0$，从而得$\|f\|^2=(f,\ f)=(f,\ g_n-g_n^*)=0$。

由(12.6)已可知$\{\varphi_n(z)\}$是$A_2(R)$的就范正交系。設任意的$h(z)\in A_2(R)$的Fourier式展开为

$$h_\infty=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}(h,\ \varphi_m)\varphi_m\ \text{（范数}\|\ \|\text{意义下的收斂）},$$

利用(4.2′)可知在含于R内部的任何閉圓$|z-z_1|\leqslant\delta$上一致地

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}(h,\ \varphi_m)\varphi_m(z)=h_\infty(z).$$

若能指出 $h_\infty(z)\equiv h(z)$，则$\{\varphi_n(z)\}$为完全系自不待論。

$h_\infty(z)\equiv h(z)$的証明。决定常数 $a_k^s(k=1, 2, \cdots, s)$，使

$$f_s(z)=\sum_{k=1}^{s} a_k^s\varphi_k(z) \tag{12.7}$$

满足条件

$$(d^m f_s(z)/dz^m)_{z=z_0}=(d^m h(z)/dz^m)_{z=z_0}\quad (m=0, 1, 2, \cdots, s-1), \tag{12.8}$$

为此，只需极[illegible]联立綫性方程

$$\sum_{k=1}^{s} a_k^s\varphi_k(z_0)=h(z_0),$$

$$\sum_{k=1}^{s} a_k^s\varphi_k'(z_0)=h'(z_0),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{s} a_k^s\varphi_k^{(s-1)}(z_0)=h^{(s-1)}(z_0)$$

来求未知数 a_k^s 就可以了。由于 $\varphi_n(z)\in F^{(n-1)}$，故

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(z_0) & \varphi_2(z_0) & \cdots & \varphi_s(z_0) \\ \varphi_1'(z_0) & \varphi_2'(z_0) & \cdots & \varphi_s'(z_0) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_1^{(s-1)}(z_0) & \varphi_2^{(s-1)}(z_0) & \cdots & \varphi_s^{(s-1)}(z_0) \end{vmatrix}=\varphi_1(z_0)\varphi_2'(z_0)\cdots\varphi_s^{(s-1)}(z_0)\neq 0,$$

由此知这联立綫性方程唯一地可解。

实則

$$a_k^s=(h, \varphi_k)\quad (k=1, 2, \cdots, s). \tag{12.9}$$

事实上，由于(12.8)并利用(12.6)得

$$(f_s-h, g_k)=0\quad (k=0, 1, \cdots, s-1),$$

从而 $(f_s-h, \varphi_k)=0\quad (k=1, 2, \cdots, s)$，即(12.9)成立。因此有 $f_s(z)=h_s(z)=\sum_{k=1}^{s}(h, \varphi_k)\varphi_k$，而

$$(d^m h_s(z)/dz^m)_{z=z_0}=(d^m h(z)/dz^m)_{z=z_0}\quad (m=0, 1, 2, \cdots, s-1),$$

并且因为在含于 R 内部的閉圓 $|z-z_0|\leqslant\delta$ 上一致地 $\lim\limits_{s\to\infty}h_s(z)=h_\infty(z)$，依逐項微分定理，

$$\lim_{s\to\infty}(d^nh_s(z)/dz^n)_{z=z_0}=(d^nh_\infty(z)/dz^n)_{z=z_0},$$

从而在 R 中正則的 $h(z)$ 与 $h_\infty(z)$ 在 $z=z_0$ 的函数值及所有导数是一致的，故 $h(z)$ 与 $h_\infty(z)$ 在 $z=z_0$ 的 Taylor 展开一致而不能不有 $h(z)\equiv h_\infty(z)$。

注　关于 Dirichlet 式范数的再生核参照 Bergman（在 35 頁引用）。

§13　Banach 空間的基底

基底的定义　对于 Banach 空間 X，若有 X 的元素列 $\{\varphi_n\}$ 满足条件：

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于任意的 } x\in X\text{，存在唯一确定的系数列 }\{\xi_i\}\\ \text{使 } x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i\text{，也就是 }\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x-\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i\right\|=0\end{array}\right\}\qquad(13.1)$$

时，便称 $\{\varphi_n\}$ 为 X 的**基底**(base)。

例如 Hilbert 空間 X 的完全就范正交系便是 X 的基底。特别是，显然可取数列

$$\varphi_1=(1,0,0,\cdots),\quad \varphi_2=(0,1,0,0,\cdots),\cdots,$$
$$\varphi_n=(0,0,\cdots,0,1,0,0,\cdots)\quad(\text{只第 } n \text{ 項是 } 1),\cdots$$

作为 (l_2) 的基底。

$C[0,1]$ 的基底　考察在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的連續函数

$$t,\ 1-t;\ u_{00}(t);\ u_{10}(t),\ u_{11}(t);\ u_{20}(t),\ u_{21}(t),\ u_{22}(t);\ u_{23}(t);\cdots\qquad(13.2)$$

此地

$$u_{kl}(t)\quad(k=0,1,2,3,\cdots;\ 0\leqslant l<2^k)$$

表示这样的函数，它的图形在 $\dfrac{l}{2^k}\leqslant t\leqslant\dfrac{l+1}{2^k}$ 是高为 1 的二等边三角形而在这区間外面 $u_{kl}(t)=0$。图 13.1 表示 $u_{22}(t)$ 的图形。設

$x(t)$是在$0\leqslant t\leqslant 1$上連續的实函数，将$0\leqslant t\leqslant 1$作2^s等分，过$t=0$，$t=1$及等分点各引y軸的平行綫，然后将它們和$x(t)$图形的交点按其t坐标的順序依次連接起来，便得着一个2^s+1边形。图13.2

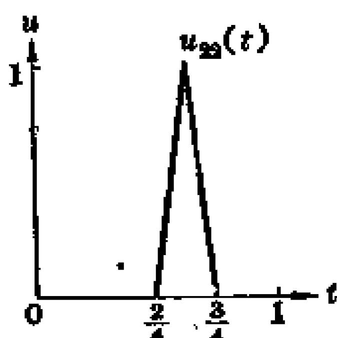


图 13.1

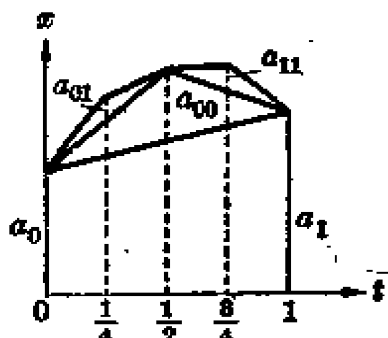


图 13.2

所画乃是$s=2$情形的图，从图上可以看出，这2^s+1边形正是

$$a_1t+a_0(1-t)+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{l=0}^{2^k-1}a_{kl}u_{kl}(t)\quad (a_0=x(0),\ a_1=x(1))$$ [1]

的图形。由于$x(t)$在$0\leqslant t\leqslant 1$一致連續，故在$0\leqslant t\leqslant 1$一致地

$$\lim_{s\to\infty}\left\{a_1t+a_0(1-t)+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{l=0}^{2^k-1}a_{kl}u_{kl}(t)\right\}=x(t). \qquad (13.3)$$

由此可知(13.2)成为$C[0,1]$的基底。

注 Banach 空間 X 如有基底$\{\varphi_i\}$，則 X 可分。这是因为以有理数为系数的形如$\sum_{i=1}^{n}r_i\varphi_i$的元，其全体是可数且在 X 稠密的緣故。从而$C(0,1)$是可分的，但$C(0,1)$的可分性也可以由 Weierstrass 的多項式近似定理直接看出，因为有理系数的多項式的全体在$C(0,1)$稠密。

---

[1] 本式及(13.3)原书均誤为$a_0t+a_1(1-t)+\cdots$。——譯者注

第4章 Milgram-Lax 的定理，Dirichlet 問題的轉換到抽象积分方程

应用由 Riesz 定理(§7)所导出的 Milgram-Lax 定理(§14)，可将关于椭圓型偏微分方程的 Dirichlet 問題的求"弱解"的問題归結到以后将讲到的(第9章)"抽象积分方程論"，但是根据同样要在以后讲到的(第7章) Weyl-Schwartz 定理，我們知道这"弱解"实质上就是"眞解"。因此，卽使不作 Green 函数(如古典的做法所要求那样)，应用 Riesz 定理卽可将 Dirichlet 問題轉化为积分方程。

§14 Milgram-Lax 的定理

定理 4.1 (Milgram-Lax)● 設对于实 Hilbert 空間 X 的所有元素对 $\{x, y\}$ 上定义着实函数 $B(x, y)$，满足条件

$$B(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, \beta_1 y_1+\beta_2 y_2)=\alpha_1\beta_1 B(x_1, y_1)+\alpha_1\beta_2 B(x_1, y_2)+ +\alpha_2\beta_1 B(x_2, y_1)+\alpha_2\beta_2 B(x_2, y_2) \quad \text{(双綫性)},$$

$$|B(x, y)|\leqslant\gamma\|x\|\cdot\|y\| \quad \text{(有界性)},$$

$$B(x, x)\geqslant\delta\|x\|^2 \quad \text{(正定性)},$$

其中 γ, δ 是正数，这时必存在有界算子 S (此时 $\|S\|\leqslant\delta^{-1}$) 使得

$$\text{对于一切 } x, y \text{ 有 } (x, y)=B(x, Sy), \tag{14.1}$$

这样的 S 是唯一确定的，而且它具有在 X 上到处定义着的有界逆算子。

注 将內积 (x, y) 看做是 x, y 的双綫性泛函时，这便是上述 $B(x, y)$ 的一个例子，此际 $S=I$ (恒等算子，卽对于一切的 x 都有 $Ix=x$)。

● P. D. Lax and A. N. Milgram: Parabolic Equations, 在 Contributions to the Theory of Partial Differential Equations 一书中(Princeton, 1954).

証明 让我們考察 X 的元素对 $\{y, y^*\}$ 中滿足

$$\text{对于一切的 } x \text{ 有 } (x, y) = B(x, y^*)$$

的那种 $\{y, y^*\}$。如象 $\{0, 0\}$ 便是一个这样的例子。此时 y^* 由 y 而唯一地确定，这是因为假如 $B(x, y^*) = B(x, y^{**})$，那么由双綫性得 $B(x, y^* - y^{**}) = 0$，再由正定性有

$$\delta\|y^* - y^{**}\|^2 \leqslant B(y^* - y^{**}, y^* - y^{**}) = 0,$$

从而必然得到 $y^* = y^{**}$。这样一来，使 $y^* = Sy$ 成立的算子 S 便被确定。由 B 的双綫性得知 S 是加法的；又由 B 的正定性与 Schwarz 不等式(2.5)有

$$\delta\|Sy\|^2 \leqslant B(Sy, Sy) = (Sy, y) \leqslant \|Sy\| \cdot \|y\|.$$

从而得 $\|Sy\| \leqslant \delta^{-1}\|y\|$，可見 S 是連續算子。不仅如此，由上面的不等式还可知 S 的定义域 $\mathfrak{D}(S)$ 为 X 的閉子空間。

証明 設 $\{y_n\} \subseteq \mathfrak{D}(S)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_\infty$，因为 $\|S(y_n - y_m)\| \leqslant \delta^{-1}\|y_n - y_m\|$，故由 X 的完备性必存在 $\lim\limits_{n\to\infty} Sy_n = z$。由内积的連續性有 $\lim\limits_{n\to\infty} (x, y_n) = (x, y_\infty)$。另一方面，借 B 的双綫性与有界性得

$$|B(x, Sy_n) - B(x, z)| = B(x, Sy_n - z) \leqslant \gamma\|x\| \cdot \|Sy_n - z\|,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} B(x, Sy_n) = B(x, z)$。因此，再由 $(x, y_n) = B(x, Sy_n)$ 就必然有 $z = y_\infty^*$，这就是說 $y_\infty \in \mathfrak{D}(S)$ 且 $Sy_\infty = z$。

$\mathfrak{D}(S)$ 旣然是閉子空間，假如 $\mathfrak{D}(S) \neq X$，那么，由定理 2.2 势必存在着适合条件

$$w_0 \in \mathfrak{D}(S)^\perp, \quad w_0 \neq 0$$

的元素 w_0。由于 B 的有界性，定义在 X 上的加法泛函 $F(z) = B(z, w_0)$ 是一个有界泛函，因此根据 Riesz 定理 2.5 确定了 w_0'，使

$$\text{对于一切 } z \in X \text{，有 } B(z, w_0) = F(z) = (z, w_0').$$

从而必然 $w_0' \in \mathfrak{D}(S)$ 且 $w_0 = Sw_0'$。因此，再由 B 的正定性与

$w_0 \in \mathfrak{D}(S)^{\perp}$ 便得到和 $w_0 \neq 0$ 相矛盾的

$$\delta\|w_0\|^2 \leqslant B(w_0, w_0) = (w_0, w_0') = 0.$$

这样就不得不 $\mathfrak{D}(S) = X$，而(14.1)得証。

最后来証明存在着 S 的在 X 上到处定义着的有界逆算子。首先，由于(14.1)，当 $Sy=0$ 时得 $(x, y)=0$，从而不得不 $y=0$，因此知 S^{-1} 存在。其次，将 $B(x, y)$ 看做是 x 的加法泛函时，由于有界，确定了算子 T 使

$$B(x, y) = (x, Ty)$$

成立。又因 $|B(x, y)| \leqslant \gamma\|x\|\cdot\|y\|$ 得 $\|Ty\| \leqslant \gamma\|y\|$，这就是説 $S^{-1}=T$ 的范数 $\leqslant \gamma$.

§15　共轭偏微分算子，弱解，Weyl-Schwartz 定理

共轭偏微分算子　考察在 E^m 的区域 R 内定义的 $2n$ 阶偏微分算子

$$L = \sum_{|\rho|, |\sigma|=0}^{n} D^{(\rho)} a^{\rho;\sigma}(x) D^{(\sigma)}. \tag{15.1}$$

在此設

$$D^{(\rho)} = \partial^{\rho_1+\cdots+\rho_m}/\partial x_1^{\rho_1}\cdots\partial x_m^{\rho_m}, \quad |\rho| = \sum_{j=1}^{m}\rho_j,$$

且 $a^{\rho;\sigma}(x) = a^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_m;\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m}(x_1, \cdots, x_m)$ 为属于 $C^\infty(R)$ 的实函数，并满足对称性：

$$\text{如 } |\rho| = |\sigma| = n, \text{ 則 } a^{\rho;\sigma}(x) = a^{\sigma;\rho}(x). \tag{15.2}$$

对于 L，我們定义它的**共轭偏微分算子** (formal adjoint operator) 为

$$L^* = \sum_{|\rho|, |\sigma|=0}^{n} (-1)^{|\rho|+|\sigma|} D^{(\sigma)} a^{\rho;\sigma}(x) D^{(\rho)}. \tag{15.3}$$

定理 4.2　如果在函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 之中，有一个属于 $C^{2n}(R)$，而另一个属于 $\mathfrak{D}^{2n}(R)$，那么 $(Lu, v)_0 = (u, L^*v)_0$（$(f, g)_0$ 的意义

見第6頁(2.7)。——譯者注)，即

$$\int_R (Lu)(x)\cdot v(x)\,dx=\int_R u(x)\,(L^*v)(x)\,dx. \tag{15.4}$$

証明 比如設 $u\in\mathfrak{D}^{2n}(R)$，令

$$w(x)=\frac{\partial^{\rho_1-1+\rho_2+\cdots+\rho_m}}{\partial x_1^{\rho_1-1}\partial x_2^{\rho_2}\cdots\partial x_m^{\rho_m}}a^{\rho;\sigma}(x)D^{(\sigma)}u(x),$$

分部积分得

$$\int(Lu)(x)\cdot v(x)\,dx_1=\int\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\cdot v(x)\,dx_1$$

$$=[w(x)\cdot v(x)]-\int w(x)\,\frac{\partial v}{\partial x_1}dx_1,$$

由于 $w(x)$的支集为 R 内部的有界閉集，故“已积分項”$[w(x)\cdot v(x)]$成为0. 反复地这样做，便得

$$\int_R (Lu)(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$=\sum_{|\rho|=|\sigma|=0}^{n}(-1)^{|\rho|}\int_R (D^{(\sigma)}u(x))\,a^{\rho;\sigma}(x)\,D^{(\rho)}v(x)\,dx$$

$$=\sum_{|\rho|=|\sigma|=0}^{n}(-1)^{|\rho|+|\sigma|}\int_R u(x)\cdot(L^*v)(x)\,dx,$$

局部 $L_2(R)$ 函数 如果定义在 R 的可測函数 $f(x)$ 对于 R 內部的任何有界閉集 F 都有 $\int_F|f(x)|^2dx<\infty$，便称 $f(x)$ 为局部 $L_2(R)$ 函数。R 內的連續函数或有界可測函数甚至更一般的属于 $H_0(R)=L_2(R)$ 的函数都是局部 $L_2(R)$ 函数。

弱解 当 $f(x)$ 为局部 $L_2(R)$ 函数时，如果有属于 $C^2(R)$ 的 $u(x)$ 在 R 上滿足

$$(Lu)(x)=f(x), \tag{15.5}$$

那么由(15.4)，

$$\text{只要 }\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)\text{，就有 }(u,\,L^*\varphi)_0=(f,\,\varphi)_0. \tag{15.6}$$

因此，不要求 $u(x)$ 的連續性或偏微分可能性，而仅只是滿足(15.6)

的局部 $L_2(R)$ 函数 $u(x)$ 被求出时[1]，这 $u(x)$ 便称为(15.5)的弱解。

弱解的例 就 $m=2$，$R=E^2$ 的情形，設 $L=\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$，則 $L=L^*$. 設 $u(x_1)$ 为到处不可微的連續函数——Weierstrass 的例，则对于 $\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2)\in\mathfrak{D}^\infty(E^2)$ 有 $(u, L^*\varphi)_0=0$. 这是因为，由于 φ 的支集为 E^2 的有界閉集，分部积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1)\varphi_{x_1x_2}(x_1, x_2)dx_2=\Big[u(x_1)\varphi_{x_1}(x_1, x_2)\Big]_{x_2=-\infty}^{x_2=\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty} u_{x_2}(x_1)\varphi_{x_1}(x_1, x_2)dx_2=0-0=0.$$

同样，連續函数 $w(x_2)$ 也满足 $(w, L^*\varphi)_0=0$. 結果方程 $Lv=0$ 具有形如 $v(x)=v(x_1, x_2)=u(x_1)+w(x_2)$ 的不可微的弱解。

当偏微分算子(15.1)在 R 中满足条件

$$\left.\begin{array}{ll} \text{若} & \sum_{j=1}^{m}\xi_j^2>0, \text{ 則 } \sum_{|\rho|=|\sigma|=n}\xi^{(\rho)}a^{\rho;\sigma}(x)\xi^{(\sigma)}>0, \\ \text{即} & \sum_{|\rho|=|\sigma|=n}\xi_1^{\rho_1}\cdots\xi_m^{\rho_m}a^{\rho_1\cdots\rho_m;\sigma_1\cdots\sigma_m}(x)\xi_1^{\sigma_1}\cdots\xi_m^{\sigma_m}>0 \end{array}\right\} \qquad (15.7)$$

时，便称(15.1)在 R 为椭圓型或椭圓的，如象 $L=\Delta=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ (拉普拉斯算子)便是这样的例子。$L=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}$ $(m=2)$ 称为双曲的，$L=\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 称为抛物的，这是大家知道的。

关于椭圓型的算子 L，成立着下面的基本定理。

定理 4.8 (Weyl[2], Schwartz[3]) 設 R 为 E^m 的开域，又椭圓型方程

$$Lu=f \qquad (15.8)$$

的右边 $f(x)$ 属于 $H_0(R)$，并假定(15.5)具有弱解 $u_0(x)\in H_0(R)$.

---

[1] 若 $f(x)$，$u(x)$ 为局部 $L_2(R)$ 函数，則对于任意的 $\varphi(x)\in\mathfrak{D}^\infty(R)$，(15.6)的两边都有意义。这两个积分对于一切 $\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)$ 的一致性正是我們所需要的。

[2] The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. J. 7 (1940), 411~444.

[3] Théorie des distributions, I (Paris, 1950).

这时如果 R_1 是开集而且它的閉包被含于 R 内部，又 $f(x)$ 在 R_1 上属于 C^∞，那么必存在属于 $C^\infty(R_1)$ 的 $u'(x)$，使 $u_0(x)$ ❶ 在 R_1 上殆遍等于 $u'(x)$。

定理的証明将在第 7 章讲述。

定理的意义 由于 u_0 是所謂弱解，故

$$\text{只要 } \varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R_1)\text{，就有 } (L^*\varphi,\ u_0)_0=(\varphi,\ f)_0$$

也成立，因为 $u'\in C^\infty(R_1)$，且 φ 的支集为含于 R_1 内部的有界閉集，故和証明定理 4.2 一样，借分部积分得

$$(L^*\varphi,\ u')_0=(\varphi,\ Lu')_0.$$

由于在 R_1 内 u_0 与 u' 殆遍相等，故結果得

$$(\varphi,\ Lu')_0=(L^*\varphi,\ u')_0=(L^*\varphi,\ u_0)_0=(\varphi,\ f)_0.$$

但因 $\mathfrak{D}^\infty(R_1)$ 在范数 $\|\ \|_0$ 的意义下于 $H_0(R_1)=L_2(R_1)$ 中稠密，故由上式，在 R_1 上連續的函数 $Lu'-f$ 不得不在 R_1 上恒等于 0。这就是說，椭圓型方程(15.5)的弱解 $u_0\in H_0(R)$ 在方程 (15.5) 右边 $f(x)$ 属于 C^∞ 的范圍內不妨看做是属于 C^∞ 的，并且就是方程的眞解(genuine solution)。这是因为在这范圍內只需就至多是 0 測度的 x 的集合上适当地修正 $u_0(x)$ 的值，便可得到属于 C^∞ 的解 $u'(x)$。再则如果是考虑弱解的話。有些場合可以依靠泛函分析的方法容易将它求得，因此考虑弱解反而显得方便。例如关于 $Lu=f$ 的 Diricihlet 間題的弱解按下节的方法便可求得。

§ 16 Gårding 不等式，Dirichlet 問題

Gårding 不等式❷ 設 R 为 E^m 的有界域，并假定系数 $a^{\rho\sigma}(x)$ 在 R 上有界，且滿足較(15.7)更强的条件：

❶ 此处原书作 $u(x)$，有誤。——校者注

❷ L. Gårding: Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scaud., 1 (1953), 55～72,

存在正数 λ，使

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{|\rho|=|\sigma|=n}\xi^{(\rho)}a^{\rho\sigma}\xi^{(\sigma)}\geqslant\lambda|\xi|^{2n}\quad\left(|\xi|^2=\sum\limits_{j=1}^{m}\xi_j^2\right).\end{array}\right\}\tag{15.7'}$$

这时必存在正数 α, γ, δ，使得

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 }\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)\text{，則}\\ \qquad\delta\|\varphi\|_n^2\leqslant(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi,\ \varphi)_0,\\ \text{若 }\varphi,\ \psi\in\mathfrak{D}^\infty(R)\text{，則}\\ \qquad|(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi,\ \psi)_0|\leqslant\gamma\|\varphi\|_n\cdot\|\psi\|_n.\end{array}\right\}\tag{16.1}$$

这称为 **Gårding 不等式**。

Gårding 不等式将在下节証明，現在先利用这不等式来証明关于 $\boldsymbol{u}+(-1)^n\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$ **的 Dirichlet 問題的弱解的存在**。

考察对于 $\mathfrak{D}^\infty(R)$ 中的任意一对 φ, ψ 所定义的双綫性泛函

$$\hat{B}(\varphi,\ \psi)=(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi,\ \psi)_0.\tag{16.2}$$

如果 $\{\varphi_k\}\subseteqq\mathfrak{D}^\infty(R)$, $\{\psi_k\}\subseteqq\mathfrak{D}^\infty(R)$ 滿足 $\lim\limits_{k,l\to\infty}\|\varphi_k-\varphi_l\|_n=0$, $\lim\limits_{k,l\to\infty}\|\psi_k-\psi_l\|_n=0$，則极限値 $\lim\limits_{k\to\infty}\hat{B}(\varphi_k,\ \psi_k)$ 必存在。这是因为

$$\hat{B}(\varphi_k,\ \psi_k)-\hat{B}(\varphi_l,\ \psi_l)=\hat{B}(\varphi_k-\varphi_l,\ \psi_k)+\hat{B}(\varphi_l,\ \psi_k-\psi_l),$$

从而由(16.1)得到

$$\begin{aligned}&|\hat{B}(\varphi_k,\ \psi_k)-\hat{B}(\varphi_l,\ \psi_l)|\\ &\qquad\leqslant\gamma\cdot\|\varphi_k-\varphi_l\|_n\cdot\|\psi_k\|_n+\gamma\cdot\|\varphi_l\|_n\cdot\|\psi_k-\psi_l\|_n\end{aligned}$$

的緣故，因此对于由 Cauchy 序列 $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$ 所定义的 $H_n(R)$ 的元 φ, ψ，可令

$$B(\varphi,\ \psi)=\lim_{k\to\infty}\hat{B}(\varphi_k,\ \psi_k).$$

事实上，和上面同样地可知这个値 $B(\varphi,\ \psi)$ 不依賴于借以定义 φ, $\psi\in H_n(R)$ 的 $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}\subseteqq\mathfrak{D}^\infty(R)$ 的选擇而唯一地确定。再則由(16.1)显然有

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 }\varphi\in H_n(R),\quad\text{則 }\delta\|\varphi\|_n^2\leqslant B(\varphi,\ \varphi),\\ \text{若 }\varphi,\ \psi\in H_n(R)\text{，則 }|B(\varphi,\ \psi)|\leqslant\gamma\|\varphi\|_n\cdot\|\psi\|_n.\end{array}\right\}\tag{16.1'}$$

利用这个就可証明下面的存在定理。

定理 4.4 当 $f\in H_0(R)=L_2(R)$，$u_1\in\widetilde{H}_n(R)$ 給定时，在

$$u+(-1)^n\alpha Lu=f \tag{16.3}$$

的弱解 u_0 中满足 $(u_0-u_1)\in H_n(R)$ 的必唯一存在，但設在 Gårding 不等式那里所述的假定是满足了的。

定理的意义 我們知道（§5，例 2），对于 $H_n(R)$ 中的函数 $v(x)\ (=u_0(x)-u_1(x))$ 的直到 n 阶的（广义函数意义下的）偏导函数 $(\widetilde{D}^{(\rho)}v)(x)\ (|\rho|\leqslant n)$，存在 $\mathfrak{D}^\infty(R)$ 的适当的函数列 $\{v_k(x)\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}\|D^{(\rho)}v_k-\widetilde{D}^{(\rho)}v\|_0=0. \tag{16.4}$$

由于每个 $v_k(x)$ 的支集为 R 内部的有界閉集，$D^{(\rho)}v_k(x)$ 在 R 边界 ∂R 的附近必恒等于 0. 因此，$\widetilde{D}^{(\rho)}v(x)$ 在(16.4)的意义下[1]可看做是在 ∂R 上“概”为 0. 这就是說，在上面定理中所得的 u_0 不仅是方程(16.3)在弱意义之下的解，而且当 $|\rho|\leqslant n$ 时 $\widetilde{D}^{(\rho)}u_0(x)$ 在 ∂R 上“概”等于已給的 $\widetilde{D}^{(\rho)}u_1(x)$. 在这种意义之下，給定直至 n 阶的（广义函数意义下的）偏导函数在 ∂R 的值后，$2n$ 阶椭圓型方程(16.3)是可解的，并且根据 Weyl-Schwartz 定理，这个弱解当方程右边 $f(x)$ 属于 C^∞ 的范圍内时殆遍等于属于 C^∞ 的真解，所以不妨认为(16.3)的 Dirichlet 問題是可解的。为了在 ∂R 的边值 $D^{(\rho)}u_0(x)$ 不是所謂“概”等于而是实际地取指定了的值 $\widetilde{D}^{(\rho)}u_1(x)$，必須附加关于 $\widetilde{D}^{(\rho)}u_1$ 的或边界 ∂R 的光滑的条件，但这里不予討論[2]。

定理 4.4 的証明 在后面将要証明，当 $u_1\in\widetilde{H}_n(R)$ 时存在和 $\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)$ 无关的正数 c，使得

$$\text{若 }\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R),\text{ 则 }|(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi,\ u_1)_0|\leqslant c\|\varphi\|_n \tag{16.5}$$

成立，因此，如果把 $(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi,\ u_1)_0$ 看做是 φ 的加法泛函的

---

[1] $\lim\limits_{k\to\infty}\int_R|D^{(\rho)}v_k(x)-\widetilde{D}^{(\rho)}v(x)|^2dx=0$ 的意义下。

[2] 参見例如 L. Nirenberg: Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure and Applied Math., 8 (1955), 643～674.

話，它可以根据連續性——如同上面从 $\hat{B}$ 得到 B 那样——扩張为按 $\| \|_n$ 将 $\mathfrak{D}^\infty(R)$ 完备化了的空間 $H_n(R)$ 上的有界加法泛函。又因

$$|(\varphi, f)_0| \leqslant \|\varphi\|_0 \cdot \|f\|_0 \leqslant \|\varphi\|_n \cdot \|f\|_0,$$

也可将 $(\varphi, f)_0$ 看做是 $H_n(R)$ 上的有界加法泛函，因此根据 Riesz 定理(应用于 Hilbert 空間 $H_n(R)$)，存在 $f'=f'(f, u_1)\in H_n(R)$，使得

若 $\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)$，則 $(\varphi, f)_0-(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi, u_1)_0=(\varphi, f')_n$，

从而再根据 Milgram-Lax 定理(应用于 Hilbert 空間 $H_n(R)$)，

$$\left.\begin{aligned}&(\varphi, f)_0-(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi, u_1)_0\\&\quad=(\varphi, f')_n=B(\varphi, Sf'),\quad Sf'\in H_n(R).\end{aligned}\right\}\quad(16.6)$$

可以如下看出 $Sf'+u_1=u_0$ 是(16.3)的弱解。若取 $\{f_k\}\subseteqq\mathfrak{D}^\infty(R)$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}\|Sf'-f_k\|_n=0$，那么易知

$$\begin{aligned}B(\varphi, Sf')&=\lim_{k\to\infty}\hat{B}(\varphi, f_k)=\lim_{k\to\infty}(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi, f_k)_0\\&=(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi, Sf')_0.\end{aligned}$$

这是因为由 $\| \|_n\geqslant\| \|_0$ 而有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|Sf'-f_k\|_0=0$ 的緣故。从而由(16.6)得

$$(\varphi, f)_0=(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi, u_1+Sf')_0,$$

即 $u_0=u_1+Sf'$ 为(16.3)的弱解。設这样的弱解有两个，則其差 $\hat{u}_0\in H_n(R)$ 必满足 $B(\varphi, \hat{u}_0)=0$。若取 $\varphi=\hat{u}_0$，則由(16.1′)知必 $\hat{u}_0=0$。这样就說明了解的唯一性。

最后(16.5)的証明 首先証明下面的不等式，它在下节証明 Gårding 不等式时也是不可缺的。

$$\left.\begin{aligned}&\text{若 } R\subseteqq E^m \text{ 为有界域，則对于 } j<k \text{ 可确定常数 } c^{j,k},\\&\text{使得 } \varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R) \text{ 时有 } \sum_{|s|=j}\|D^{(s)}\varphi\|_0^2\leqslant c^{j,k}\sum_{|s|=k}\|D^{(s)}\varphi\|_0^2.\end{aligned}\right\}\quad(16.7)$$

以下是它的証明。若将 $\varphi(x)\in\mathfrak{D}^\infty(R)$ 看做是在 R 以外到处为 0

的 $\mathfrak{D}^\infty(E^m)$ 中的函数，则

$$\varphi(x)=\varphi(x_1,\cdots,x_m)=\int_{-\infty}^{x_i}\frac{\partial\varphi(x_1,\cdots,x_{i-1},t,x_{i+1},\cdots,x_m)}{\partial t}dt.$$

因为 R 是有界閉集，由 Schwarz 不等式

$$|\varphi(x)|^2\leqslant(R\text{ 的直徑})❶\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2dx_i,$$

从而利用 φ 在 R 以外为 0 的事实，

$$\int_R|\varphi(x)|^2dx\leqslant(R\text{ 的直徑})\cdot\int_R dx_1\cdots dx_m\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2dx_i\right\}$$

$$\leqslant(R\text{ 的直徑})^2\cdot\int_R\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2dx,$$

即

$$\|\varphi\|_0^2\leqslant(R\text{ 的直徑})^2\cdot\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_0^2.$$

反复这样做便得(16.7)。

现在进入(16.5)的証明。由于 $u_1\in\widetilde{H}_n(R)$，故 u_1 的直到 n 阶的广义函数意义下的导函数 $\widetilde{D}^{(\sigma)}u_1(|\sigma|\leqslant n)$ 属于 $H_0(R)=L_2(R)$。从而对

$$(L^*\varphi,u_1)_0=\sum_{|\rho|=|\sigma|=0}^{n}(-1)^{|\rho|+|\sigma|}(D^{(\sigma)}a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi_1,u_1)_0$$

$$=\sum_{|\rho|=|\sigma|=0}^{n}(-1)^{|\rho|}(a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\widetilde{D}^{(\sigma)}u_1)_0$$

应用 Schwarz 不等式，并利用 $a^{\rho;\sigma}(x)$ 的有界性 $(|a^{\rho;\sigma}(x)|\leqslant\eta<\infty)$ 及(16.7)便得

$$|(L^*\varphi,u_1)_0|\leqslant\sum_{|\rho|=|\sigma|=0}^{n}\eta\|D^{(\rho)}\varphi\|_0\cdot\|\widetilde{D}^{(\sigma)}u_1\|_0$$

$$\leqslant\text{常数}\times\|\varphi\|_n.$$

証毕

其次关于 $Lu=f$ 的 Dirichlet 問題的解法 对于給定的 $u_1\in\widetilde{H}_n(R)$，設 $u_0\in L_2(R)$ 为

$$Lu=f\text{ 的弱解且 }u_0-u_1\in H_n(R).$$

❶ R 中任意两点的距离的上确界。

令 $u_0-u_1=u_2\in H_n(R)$，則所謂 u_0 为弱解与

$$(u_0,\ L^*\varphi)_0=(u_1,\ L^*\varphi)_0+(u_2,\ L^*\varphi)_0=(f,\ \varphi)_0$$

等价。由于 $u_1\in\widetilde{H}_n(R)$，和推导(16.5)的方法一样，利用"分部积分"得 $|(u_1,\ L^*\varphi)_0|\leqslant$常数$\times\|\varphi\|_n$。又和前面一样，有 $|(f,\ \varphi)_0|\leqslant\|f\|_0\cdot\|\varphi\|_0\leqslant\|f\|_0\cdot\|\varphi\|_n$，故对于 $\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)$ 的加法泛函

$$F(\varphi)=(f,\ \varphi)_0-(u_1,\ L^*\varphi)_0,$$

可在 $H_n(R)$ 中应用 Riesz 定理而知使

$$F(\varphi)=(f,\ \varphi)_0-(u_1,\ L^*\varphi)_0=(v,\ \varphi)_n,\quad v\in H_n(R)$$

成立的 v 存在。因此，应用 Milgram-Lax 定理，原来的 Dirichlet 問題便等价于：对于已給的 $Sv\in H_n(R)$，求滿足

$$\text{若 } \varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)\text{，則 } (u_2,\ L^*\varphi)_0=B(Sv,\ \varphi),\ u_2\in H_n(R) \tag{16.8}$$

的 u_2。

但因对于任意的 $u\in L_2(R)=H_0(R)$，

$$|(u,\ \varphi)_0|\leqslant\|u\|_0\cdot\|\varphi\|_0\leqslant\|u\|_0\cdot\|\varphi\|_n,$$

故由 Riesz 定理(应用于 $H_n(R)$)，存在 $u'=Tu\in H_n(R)$，使

$$(u,\ \varphi)_0=(u',\ \varphi)_n \text{ 且 } \|u'\|_n\leqslant\|u\|_0. \tag{16.9}$$

再度应用 Milgram-Lax 定理，由(16.9)得

$$\left.\begin{aligned}&(u,\ \varphi)_0=(u',\ \varphi)_n=B(Su',\ \varphi)=B(STu,\ \varphi),\\&\|STu\|_n\leqslant\delta^{-1}\|u\|_0.\end{aligned}\right\} \tag{16.10}$$

因此，由(16.8)，若 $\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)$，則

$$\begin{aligned}B(u_2,\ \varphi)&=(u_2,\ \varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi)_0\\&=(u_2,\ \varphi)+(-1)^n\alpha(u_2,\ L^*\varphi)\\&=B(STu_0,\ \varphi)+(-1)^n\alpha B(Sv,\ \varphi),\end{aligned}$$

卽

$$B(u_2-STu_2-(-1)^n\alpha Sv,\ \varphi)=0.$$

取 φ 等于 $u_2-STu_2-(-1)^n\alpha Sv\in H_n(R)$ 时，由 B 的正定性得

$$u_2-STu_2=(-1)^n\alpha Sv. \tag{16.11}$$

右边 $(-1)^n\alpha Sv\in H_n(R)$ 乃是旣知的函数，对此解 (16.11) 来求 $u_2\in H_n(R)$ 和求原来的 Dirichlet 問題的弱解 $u_2\in H_n(R)$ 完全等价，但由于(16.10) ST 满足条件

$$u\in H_n(R) \text{ 时 } \|STu\|_n\leqslant\delta^{-1}\|u\|_0. \tag{16.12}$$

如后所述(第 9 章)，满足(16.12)的 $H_n(R)$ 中的算子 ST 具有"完全連續性"，因此"抽象积分方程"的理論得以适用于(16.11)。依照它的結果，

(i) 要么，齐次方程 $u-STu=0$ 有非 0 解 $u\in H_n(R)$，

(ii) 要么，对于任意的 $w\in H_n(R)$，非齐次方程 $u-STu=w$ 有唯一确定的解 $u\in H_n(R)$，

二者必居其一——**Fredholm 的交代定理**(alternative)。

但在 (i) 的情形，如同 (16.11) 的推导过程所示，u 满足 $(u, \varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi)_0=(u, \varphi)_0$。这就是說 $u\in H_n(R)$ 是 $L(u)=0$ 的弱解，所以下面的定理成立。

定理 4.5 要么，齐次方程 $Lu=0$ 有非 0 解，要么，对于任意的 $f\in L_2(R)=H_0(R)$ 与任意的 $u_1\in \tilde{H}_n(R)$，非齐次方程 $Lu=f$ 有唯一的适合 $u_0-u_1\in H_n(R)$ 的弱解 u_0，二者必居其一(若 $f\in C^\infty(R)$，由 Weyl-Schwartz 定理"弱解"一詞也不妨换成"眞解")。

注 凭同样的想法，关于 L 的 Neumann 問題也可通过 Milgram-Lax 定理归結到抽象积分方程。关于此可参照前面提到的 Gårding 的論文。

§17 Gårding 不等式的証明

我們将利用关于 Fourier 变换的 Plancherel 定理。

定理 4.6[1] (Plancherel) 若对于 $f(x)\in L_2(E^m)$，定义

$$\int_{|x|<n} f(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)\,dx=g_n(y),$$

则当 $n\to\infty$ 时，g_n 在 $L_2(E^m)$ 中范数$\|\ \|_0$的意义下收斂，即 Cauchy

[1] 关于它的証明可参照本丛书，河田龍夫著《富里埃变换与拉普拉斯变换》。

的收斂条件

$$\lim_{n,k\to\infty}\|g_n-g_k\|_0^2=\lim_{n,k\to\infty}\int_{E_m}|g_n(y)-g_k(y)|^2dy=0$$

是满足的。由于$L_2(E^m)$的完备性，$\{g_n\}$在范数意义下的极限被唯一地确定。这极限記为

$$(\mathfrak{F}f)y=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{|x|\leqslant n}f(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx, \quad (17.1)$$

并称为$f(x)\in L_2(E^m)$的 **Fourier 变换**。$\mathfrak{F}$是一个酉(unitary)算子，也就是說$\mathfrak{F}$将$L_2(E^m)$一对一地映照到全体$L_2(E^m)$，且

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{F}(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)=\alpha_1\mathfrak{F}(f_1)+\alpha_2\mathfrak{F}(f_2)\quad(\text{加法的}),\\&\|\mathfrak{F}f\|_0=\|f\|_0,\ \text{更一般地}\\&\qquad(f,g)_0=(\mathfrak{F}f,\mathfrak{F}g)_0\qquad(\text{等距的}).\end{aligned}\right\}\quad(17.2)$$

同样地也可定义酉算子

$$(\mathfrak{F}^*g)(x)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{|x|\leqslant n}g(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy, \quad (17.3)$$

而$\mathfrak{F}^*$与$\mathfrak{F}$互为逆算子：

$$\mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}f)=f,\quad \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^*g)=g. \quad (17.4)$$

系1（卷积的法则） 若$f_1(x)$及$f_2(x)$属于$L_2(E^m)$，則关于它們的卷积(convolution)

$$f_1*f_2(x)=\int_{E^m}f_1(x-y)f_2(y)dy\quad(x-y=(x_1-y_1,\cdots,x_m-y_m)) \quad (17.5)$$

有

$$f_1*f_2(y)=\int_{E^m}(\mathfrak{F}f_1)(x)\cdot(\mathfrak{F}f_2)(x)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx. \quad (17.6)$$

又由分部积分得下面的系。

系2 若$f(x)\in L_2(E^m)$具有k阶連續偏导函数，且$D^{(s)}f(x)\in L_2(E^m)$，$|s|\leqslant k$，则

$$\mathfrak{F}(D^{(s)}f)(y)=\prod_{j=1}^{m}(2\pi\sqrt{-1}\,y_j)^{s_j}\cdot(\mathfrak{F}f)(y). \qquad (17.7)$$

Gårding 不等式的証明第一段　除(16.7)以外还需下面的准备：

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\sup_{\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)}\frac{\alpha\|\varphi\|_{k-1}^2}{\|\varphi\|_0^2+\alpha\|\varphi\|_k^2}=0, \qquad (17.8)$$

存在正数 λ, λ'，使得对一切 $\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R)$ 有

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}(a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0\geqslant\lambda\|\varphi\|_n^2-\lambda'\|\varphi\|_{n-1}\cdot\|\varphi\|_n\\ \displaystyle\left(\text{但}\|\varphi\|_k^2=\sum_{|\sigma|=k}\int_R|D^{(\sigma)}\varphi(x)|^2dx\right).\end{array}\right\}(17.9)$$

(17.8)的証明　若在 R 外定义 φ 的值为 0 而将 φ 看做是属于 $\mathfrak{D}^\infty(R)$ 的函数，则由(17.2)及(17.7)，

$$\|D^{(s)}\varphi\|_0^2=\|\mathfrak{F}D^{(s)}\varphi\|_0^2=\int_{E^m}(2\pi)^{2|s|}\prod_{j=1}^{m}y_j^{2s_j}|\mathfrak{F}\varphi(y)|^2dy.$$

因此，由于比值

$$\frac{\alpha\displaystyle\sum_{|s|\leqslant k-1}\prod_{j=1}^{m}y_j^{2s_j}}{1+\alpha\displaystyle\sum_{|t|\leqslant k}\prod_{j=1}^{m}y_j^{2t_j}}\quad\left(|s|=\sum_{j=1}^{m}s_j,\ \ |t|=\sum_{j=1}^{m}t_j\right)$$

当 $\alpha\downarrow 0$ 时关于 $(y_1,\cdots,y_m)$ 一致地收敛于 0 而知(17.8)成立。

(17.9)的証明(i)　当 $a^{\rho;\sigma}(x)$ $(|\rho|=|\sigma|=n)$ 为常数时可如下証明：若定义 φ 在 R 外的值为 0 而将 φ 看做是 $\mathfrak{D}^\infty(E^m)$ 的函数，则由(17.2)及(17.7)，知(17.9)的左边

$$=\int_{E^m}(2\pi)^{2n}\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}\prod_{j=1}^{m}y_j^{\rho_j}a^{\rho_1\cdots\rho_m;\sigma_1\cdots\sigma_m}\prod_{k=1}^{m}y_k^{\sigma_k}|(\mathfrak{F}\varphi)(y)|^2dy.$$

因此，再由(15.7′)，(17.2)及(17.7)，

$$\geqslant\lambda\int_{E^m}(2\pi)^{2n}\sum_{|s|=n}(y_1^{s_1}y_2^{s_2}\cdots y_m^{s_m})^2|(\mathfrak{F}\varphi)(y)|^2dy$$

$$=\lambda\int_{E_m}\sum_{|s|=n}|(\mathfrak{F}D^{(s)}\varphi)(y)|^2dy$$

$$=\lambda\int_{E^m}\sum_{|s|=n}|(D^{(s)}\varphi)(y)|^2dy=\lambda\|\varphi\|_n^2,$$

在此設 $\lambda'=0$。

(17.9)的証明(ii)　設 R 已充分小，以致

$$\sup_{|\rho|=|\sigma|=n;x,x'\in R}|a^{\rho;\sigma}(x)-a^{\rho;\sigma}(x')|=\varepsilon$$

可看做是充分小的情形。設在 R 的一点 $x^{(0)}$ 处 $a^{\rho;\sigma}$ 的值为 $a_0^{\rho;\sigma}$，对于

$$\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}(a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0$$
$$=\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}(a_0^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0$$
$$+\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}((a^{\rho;\sigma}-a_0^{\rho;\sigma})D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0$$

的右边第二項应用 Schwarz 不等式得

$$\Big|\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}((a^{\rho;\sigma}-a_0^{\rho;\sigma})D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0\Big|$$
$$\leqslant\varepsilon\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}\|D^{(\rho)}\varphi\|_0\cdot\|D^{(\sigma)}\varphi\|_0\leqslant\varepsilon\cdot\text{常数}\cdot\|\varphi\|_n^2(=\varepsilon'\cdot\|\varphi\|_n^2).$$

从而由(i)有

$$\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}(a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0\geqslant(\lambda-\varepsilon')\|\varphi\|_n^2.$$

設 R 充分小以致 $\lambda-\varepsilon'>0$，則以 $\lambda-\varepsilon'$ 代替 λ 并設 $\lambda'=0$，(17.9) 卽得証。

(17.9)的証明(iii)　有界域 R 可用半徑 $\eta/2>0$ 的开球 S_1, S_2, $\cdots$, S_N 予以复盖。如果对于每个 S_i 作半徑 η 的同心开球 S_i'，并取 $\varphi_i(x)\in C^\infty(E^m)$ 使滿足

$$\left.\begin{array}{l} x\in S_i\text{ 时 }\varphi_i(x)>0,\ x\overline{\in}S_i'\text{ 时 }\varphi_i(x)=0,\\ \text{且在 }E^m\text{ 上到处 }\varphi_i(x)\geqslant 0\end{array}\right\}$$

而考慮

$$h_i(x)=\Big(\varphi_i(x)\Big/\sum_{j=1}^N\varphi_j(x)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

的話，那么 $h_i(x)\geqslant 0$，且属于 $C^\infty(R)$，且在 R 上滿足 $\sum_{j=1}^N h_i(x)^2=1$，因此可写成

$$\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}(a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0 \quad (\varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R))$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}(a^{\rho;\sigma}h_jD^{(\rho)}\varphi,\ h_jD^{(\sigma)}\varphi)_0$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\left\{\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}(a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}h_j\varphi,\ D^{(\sigma)}h_j\varphi)_0-R_j\right\}$$

的形式。在此 R_j 可借在 R 上有界的函数 $C^{\rho';\sigma'}(x)$ 而表示为

$$\sum_{|\rho'|或|\sigma'|<n}(C^{\rho';\sigma'}D^{(\rho')}\varphi,\ D^{(\sigma')}\varphi)_0$$

的形式，这由关于函数乘积的求导数的 Leibniz 公式不难看出。因此，由 Schwarz 不等式，对于某常数 $a_j>0$ 有

$$|R_j|\leqslant a_j\|\varphi\|_{n-1}\cdot\|\varphi\|_n.$$

从而設 $\eta>0$ 充分小时利用(ii)对于某常数組 $\lambda_j>0$ 必然

$$\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}(a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j\|h_j\varphi\|_n^2-a_j\|\varphi\|_{n-1}\cdot\|\varphi\|_n).$$

但因按照同上論法，对于某常数 $b_j>0$，得

$$\|h_j\varphi\|_n^2\geqslant\int_R h_j(x)^2\sum_{|\rho|=n}|D^{(\rho)}\varphi(x)|^2dx-b_j\|\varphi\|_{n-1}\cdot\|\varphi\|_n,$$

故設 $\lambda=\min(\lambda_j)$，$\sum_{j=1}^{N}(\lambda_jb_j+a_j)=\lambda'$ 时，

$$\sum_{|\rho|=|\sigma|=n}(a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0\geqslant\lambda\|\varphi\|_n^2-\lambda'\|\varphi\|_{n-1}\cdot\|\varphi\|_n.$$

Gårding 不等式的証明第二段　由(17.9)，

$$(\varphi+(-1)^n\alpha L^*\varphi,\ \varphi)_0$$

$$\geqslant(\varphi,\ \varphi)_0+\alpha\left(\lambda\|\varphi\|_n^2-\lambda\sum_{k<n}\|\varphi\|_k^2-\lambda'\|\varphi\|_{n-1}\cdot\|\varphi_n\|\right)$$

$$-\alpha\sum_{|\rho|<n,\,|\sigma|\leqslant n}|(a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\ D^{(\sigma)}\varphi)_0|.$$

右边第二項由于(16.7)对于某常数 $\lambda''>0$，

$$\geqslant\alpha(\lambda\|\varphi\|_n^2-\lambda''\|\varphi\|_{n-1}^2-\lambda'\|\varphi\|_{n-1}\cdot\|\varphi\|_n).$$

又因 $a^{\rho;\sigma}(x)$在 R 有界，右边第三項对于某常数 $\eta>0$，

$$\geqslant -\alpha \sum_{|\rho|<n, |\sigma|=n} \eta \|D^{(\rho)}\varphi\|_0 \cdot \|D^{(\sigma)}\varphi\|_0 \geqslant -\alpha\eta \|\varphi\|_{n-1} \cdot \|\varphi\|_n.$$

因此，設 $\tau>0$ 时有

$$(\varphi+(-1)^n \alpha L^* \varphi,\ \varphi)_0$$

$$\geqslant (\varphi,\ \varphi)_0 + \alpha(\lambda\|\varphi\|_n^2 - \lambda''\|\varphi\|_{n-1}^2 - (\lambda'+\eta)\|\varphi\|_{n-1} \cdot \|\varphi\|_n)$$

$$\geqslant (\varphi,\ \varphi)_0 + \alpha\Big[\lambda\|\varphi\|_n^2 - \lambda''\|\varphi\|_{n-1}^2 - \frac{\lambda'+\eta}{2}(\|\varphi\|_{n-1}^2 \tau + \|\varphi\|_n^2 \tau^{-1})\Big]$$

$$= (\varphi,\ \varphi)_0 + \alpha\Big[\|\varphi\|_n^2\Big(\lambda - \frac{\lambda'+\eta}{2}\tau^{-1}\Big) - \|\varphi\|_{n-1}^2\Big(\lambda'' + \frac{\lambda'+\eta}{2}\tau\Big)\Big].$$

从而如果取 $\tau>0$ 充分大使 $\Big(\lambda - \frac{\lambda'+\eta}{2}\tau^{-1}\Big)>0$，然后取 $\alpha>0$ 充分小而利用(17.8)的話，便可得(16.1)中的前一式。至于(16.1)中的后一式可由 Schwarz 不等式与(16.7)立刻得到。

第5章 Hahn-Banach 的延拓定理

我們在第2章里考慮了在 Hilbert 空間 X 上定义的有界加法泛函而得到 F. Riesz 的定理2.5。这 Riesz 定理正是 Hilbert 空間論的基础，它的有效性曾通过若干应用例子加以說明。如果要想在一般的賦范空間里作同样的尝試，那么首先不得不从有界加法泛函的存在定理开始，这便是标題中的所謂 Hahn-Banach 的延拓定理。

§18 Hahn-Banach 的延拓定理

定理5.1 設在实賦范空間 X 的实子空間 M❶上定义的实値加法泛函 $f(x)$ 在 M 上是連續的，由定理1.5我們知道，这等于說 f 在 M 上的范数是有界的：

$$\|f\|_M=\sup_{x\in M,\,\|x\|\le 1}|f(x)|<\infty. \tag{18.1}$$

对于这样的 f 一定可以作出定义在 X 上的連續加法泛函 $\hat{F}$ 便满足下列条件：

$$\text{若 } x\in M,\text{ 則 } \hat{F}(x)=f(x), \tag{18.2}$$

即 $\hat{F}$ 为 f 的由 M 到 X 的**延拓**，且

$$\|\hat{F}\|_X=\|f\|_M. \tag{18.3}$$

証明 設 $x_0\overline{\in}M$ 而考慮 $\{x=m+tx_0;\ m\in M,\ t\text{ 实数}\}=\{M,x_0\}$，那么 $\{M,x_0\}$ 显然是实子空間，且 $\{M,x_0\}$ 的元 x 可唯一地表示为

$$x=m+tx_0\quad(m\in M,\ t\text{ 实数}) \tag{18.4}$$

❶ 附加"实"这一形容詞无非要表明 X 或 M 都是作为以实数为系数的矢量空間来看待的。

的形式。因为，假如 $m_1, m_2 \in M$ 而 $m_1+t_1x_0=m_2+t_2x_0$，则势必 $(m_1-m_2)=(t_2-t_1)x_0$，若 $t_2-t_1=0$，则 $m_1=m_2$，又若 $t_2-t_1\neq 0$，则由 $x_0=(t_2-t_1)^{-1}(m_1-m_2)$ 而得到

$$x_0 \overline{\in} M,\ x_0 \in M$$

的矛盾。于是取定任一实数 c 并将任意的 $x\in\{M, x_0\}$ 表成(18.4)的形式时，我們可以考虑

$$F(x)=F(m+tx_0)=f(m)+tc. \tag{18.5}$$

因为由 x 唯一地确定了 m 与 t，故 $F(x)$ 的值是唯一地确定了的。这 F 是 f 的到 $\{M, x_0\}$ 的延拓 ($t=0$ 时，$F(m)=f(m)$)，而且在 $\{M, x_0\}$ 上是加法的。加法性的証明可如下进行：設

$$x_1=m_1+t_1x_0,\ x_2=m_2+t_2x_0 \quad (m_1, m_2\in M),$$

则 x_1 与 x_2 的綫性組合成为

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=(\alpha_1m_1+\alpha_2m_2)+(\alpha_1t_1+\alpha_2t_2)x_0.$$

因右边第一項 $\in M$，故有

$$\begin{aligned}F(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)&=f(\alpha_1m_1+\alpha_2m_2)+(\alpha_1t_1+\alpha_2t_2)\cdot c\\&=\alpha_1f(m_1)+\alpha_1t_1\cdot c+\alpha_2f(m_2)+\alpha_2t_2\cdot c\\&=\alpha_1F(m_1+t_1x_0)+\alpha_2F(m_2+t_2x_0)\\&=\alpha_1F(x_1)+\alpha_2F(x_2).\end{aligned}$$

其次，适当地选取上面的 c 必可使

$$\|F\|_{\{M, x_0\}}=\|f\|_M \tag{18.6}$$

成立。为此只需使

$$x=m+tx_0,\ m\in M \text{ 时 } F(x)=f(m)+tc\leqslant\|f\|_M\cdot\|x\| \tag{18.7}$$

成立就行了。事实上，由(18.7)得 $-F(x)=F(-x)\leqslant\|f\|_M\cdot\|-x\|=\|f\|_M\cdot\|x\|$，故 $|F(x)|\leqslant\|f\|_M\cdot\|x\|$，而 $\|F\|_{\{M,x_0\}}\leqslant\|f\|_M$ 成立。另一方面，由于 F 是 f 的延拓，相反的不等式自然也成立，卽(18.6)是滿足的。但因(18.7)当 $t=0$ 时成为 $f(m)\leqslant\|f\|_M\cdot\|m\|$ 显然是成立的，故只需在 $t>0$ 及 $t=-s<0$ 的情形使(18.7)成立就行了。

又因 $\frac{m}{t}$ 及 $\frac{m}{s}$ 都和 m 同时属于 M，故最后只需适当选取 c 使

$$\left.\begin{array}{l} m,\ m' \in M \text{ 时，恒有} \\ f(m)+c \leqslant \|f\|_M \cdot \|m+x_0\|, \\ f(m')-c \leqslant \|f\|_M \cdot \|m'-x_0\| \end{array}\right\} \tag{18.7'}$$

成立就行了。但

$$\begin{aligned} f(m)+f(m') = f(m+m') &\leqslant \|f\|_M \cdot \|m+m'\| \\ &= \|f\|_M \cdot \|m+x_0+(m'-x_0)\| \\ &\leqslant \|f\|_M \cdot \{\|m+x_0\|+\|m'-x_0\|\}, \end{aligned}$$

故

$$f(m') - \|f\|_M \cdot \|m'-x_0\| \leqslant \|f\|_M \cdot \|m+x_0\| - f(m)$$

成立，也就是說 m' 在 M 中变动时左边的上确界不大于 m 在 M 中变动时右边的下确界。因此，如果选取介于这上下确界之間的任意的 c 的話，立刻可知(18.7′)得到滿足。

現在將 $X-M$ 的元依 Zermelo 公理予以整列而得

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1},\ \cdots,\ x_\xi,\ \cdots$$

按上面的方法，將 f 首先保持范数地延拓到 $\{M,\ x_0\}$，然后，設在上面序列中不属于 $\{M,\ x_0\}$ 的最初的元为 x_i 的話，再保持范数地延拓到 $\{\{M,\ x_0\},\ x_i\}$，这样继續下去便达到 $\hat{F}$.

定理 5.1′ 設在复賦范空間 X 的复子空間 M❶上定义的复值加法泛函 $f(x)$ 在 M 上連續，由定理 1.5 我們知道，这等于說 f 在 M 上的范数是有界的：

$$\|f\|_M = \sup_{x\in M,\ \|x\|\leq 1} |f(x)| < \infty. \tag{18.1'}$$

对于这样的 f 一定可以作出定义在 X 上的連續加法泛函 $\hat{F}$ 滿足下列条件：

$$\left.\begin{array}{l} \text{若 } x \in M,\ \text{則 } \hat{F}(x) = f(x), \\ \|\hat{F}\|_X = \|f\|_M. \end{array}\right\} \tag{18.2'}$$

❶ 附加"复"这个形容詞无非为了表明 X 或 M 是以复数为系数的矢量空間。

証明[1]　对于 $x\in M$，将 $f(x)$ 分解为实部 $g(x)$ 与虚部 $h(x)$：

$$f(x)=g(x)+\sqrt{-1}\,h(x).$$

把 M 作为实赋范空間看待时，显然 $g(x)$，$h(x)$ 是定义在 M 上的实値連續加法泛函，且 $\|g\|_M\leqslant\|f\|_M$，$\|h\|_M\leqslant\|f\|_M$. 又因

$$f(\sqrt{-1}\,x)=\sqrt{-1}\,f(x),$$

有

$$h(x)=-g(\sqrt{-1}\,x).$$

由前定理存在着 $g(x)$（作为实値加法泛函）的到 X 的延拓 $G(x)$ 而且滿足 $\|G\|_X=\|g\|_M$。作

$$\hat{F}(x)=G(x)-\sqrt{-1}\,G(\sqrt{-1}\,x)$$

即为所求。首先由 $h(x)=-g(\sqrt{-1}\,x)$ 容易看出，$\hat{F}(x)$ 是复値加法泛函 f 的延拓。又 $\|\hat{F}\|_X=\|f\|_M$ 是因为，若設 $\hat{F}(x)=re^{i\theta}$，則由于 $e^{-i\theta}\hat{F}(x)$ 为实数而得

$$|\hat{F}(x)|=|e^{-i\theta}\hat{F}(x)|=|\hat{F}(e^{-i\theta}x)|=|G(e^{-i\theta}x)|\leqslant\|g\|_M\cdot\|e^{-i\theta}x\|$$

的緣故。

系1　对于賦范空間 X 中任意給定的点 $x_0\neq0$，一定可以作出有界加法泛函 f_0 使滿足

$$f_0(x_0)=\|x_0\|,\quad \|f_0\|=1. \tag{18.8}$$

証明　在 $M=\{x=tx_0;\ t\text{ 任意的系数}\}$ 上定义泛函

$$f(x)=f(tx_0)=t\cdot\|x_0\|,$$

这显然是加法的，并且

$$f(x_0)=\|x_0\|,\ |f(x)|=|t|\cdot\|x_0\|=\|tx_0\|=\|x\|,$$

从而 $\|f\|_M=1$. 因此可保持范数地将 f 延拓到全体 X. 以这延拓作为 f_0 即可。

系1的几何意义　根据 Riesz 定理2.5，对于实 Hilbert 空

---

[1] H. F. Bohnenblust and A. Sobczyk: Bullet. Amer. Math. Soc. (1938), 91～93.

間 $(l_2(m))$ 上的有界加法泛函 f，可唯一地确定 $\{f_i\}\in(l_2(m))$，使得

$$\text{对于 } x=\{\xi_i\}\in(l_2(m)) \text{ 有 } f(x)=\sum_{i=1}^{m}f_i\xi_i. \tag{18.9}$$

因此 $(l_2(m))$ 上的有界加法泛函 f 与 E^m 的超平面系

$$\sum_{i=1}^{m}f_i\xi_i=\text{常数}\quad\left(\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{m}f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{18.10}$$

一对一地对应着。系 1 說明对于 E^m 的任一点 $x_0=\{\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_m^{(0)}\}$，总可作超平面 $\sum_{i=1}^{m}f_i^{(0)}\xi_i=\|x_0\|$，通过 x_0（即 $\sum_{i=1}^{m}f_i^{(0)}\xi_i^{(0)}=\|x_0\|$）且 $\|f^{(0)}\|=\left(\sum_{i=1}^{m}(f_i^{(0)})^2\right)^{\frac{1}{2}}=1$。系 1 实质上就是将这个事实推广到一般賦范空間上所得的結果。

系 2 对于賦范空間 X 的子空間 M 与不屬于 M 的点 $x_0\in X$，設 x_0 到 M 的距离为

$$d=\inf_{m\in M}\|x_0-m\|>0, \tag{18.11}$$

这时必存在满足

$$x\in M \text{ 时 } f_0(x)=0,\ f_0(x_0)=1 \text{ 且 } \|f_0\|\leqslant d^{-1}\text{❶} \tag{18.12}$$

的有界加法泛函 f_0。

証明 考虑定义在 $\{M, x_0\}$ 的各点 $x=m+tx_0\ (m\in M)$ 上的加法泛函 $f(x)=t$。这 f 满足

$$x\in M \text{ 时 } f(x)=0.$$

其次，如果 $t\neq0$，那么由于这时 $x=m+tx_0\neq0$，

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|t|=|t|\cdot\|x\|/\|x\|=|t|\cdot\|x\|/\|m+tx_0\|\\&=\|x\|\Big/\left\|x_0-\left(-\frac{m}{t}\right)\right\|\leqslant\frac{1}{d}\|x\|,\end{aligned}$$

---

❶ 这不等式必为等式。事实上，

$$\begin{aligned}\|f_0\|&\geqslant\sup_{x\in M}|f_0(x_0-x)|/\|x_0-x\|=\sup_{x\in M}|f_0(x_0)-f_0(x)|/\|x_0-x\|\\&=\sup_{x\in M}\|x_0-x\|^{-1}=d^{-1}.\end{aligned}$$ ——譯者注

从而 $\|f\|_{(M,x_0)}\leqslant d^{-1}$，将这 f 保持范数地延拓到 X 所得即可作为 f_0。

作为系2的应用之一，有下面的近似定理：

定理5.2 給定实赋范空間 X 的子集 N 与 X 的元 x_0。x_0 可由 N 中的元的綫性組合在范数意义下来任意逼近的充要条件为，对于具有性质：

$$n\in N \text{ 时恒有 } f(n)=0$$

的一切有界加法泛函 f，有 $f(x_0)=0$。

証明（充分性） N 的元的綫性組合 $m=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i$ $(x_i\in N)$ 的全体 M 为 X 的子空間。若 $n\in N$ 时 $f(n)=0$，則由 f 的加法性，$m\in M$ 时必 $f(m)=0$。由此便知 x_0 必屬于 M 的閉包 M^a。事实上，假如 $d=\inf_{m\in M}\|x_0-m\|>0$，則由系2将存在滿足(18.12)的 f_0，而这是不合理的。

（必要性） 設 $x_0=\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{k_j}\alpha_i^{(j)}x_i(x_i\in N)$，則由 f 的連續性与 $f(x_i)=0$ $(i=1, 2, \cdots)$ 立即得到

$$f(x_0)=\lim_{j\to\infty}f\left(\sum_{i=1}^{k_j}\alpha_i^{(j)}x_i\right)=\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{k_j}\alpha_i^{(j)}f(x_i)=0.$$

注意 定理5.1从而系1，系2，定理5.2等可在同样形式之下推广到复赋范空間❶，但在复 Hilbert 空間由于有定理2.2与 Riesz 定理2.5，故系1，系2及定理5.2即使不利用定理5.1的对复赋范空間的推广，也可得到証明。

§19 共軛空間

共軛空間 如果将定义在赋范空間 X 上的有界加法泛函 f 的全体記作 X^*，那么 X^* 按照 $(f, g\in X^*)$

$$(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x),\ \|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1, x\in X}|f(x)| \quad (19.1)$$

❶ 詳見吉田：位相解析 I（岩波）。

构成一个 Banach 空間，这称为 X 的**共軛空間**。

証明 且先証明下面的更一般的定理：

定理 5.3 設 $\mathfrak{B}(X, X_1)$ 为从賦范空間 X 到 Banach 空間❶ X_1 的有界加法算子 T 的全体，那么 $\mathfrak{B}(X, X_1)$ 按照

$$\text{算法 } T+S,\ \alpha T \text{ 及范数 } \|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$$

构成一个 Banach 空間。

証明
$$\|T+S\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(T+S)x\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|Sx\| = \|T\| + \|S\|.$$

因同样地 $\|\alpha T\| = |\alpha| \cdot \|T\|$ 也成立，故 $\mathfrak{B}(X, X_1)$ 为賦范空間。它的完备性可如下証明：若 $\lim_{n,m\to\infty} \|T_n - T_m\| = 0$，則对于一切 $x \in X$，$\{T_n x\}$ 作为 X_1 的点列滿足 Cauchy 收斂条件。由于 X_1 的完备性，$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx \in X_1$ 必存在。T 显然是加法的，不仅如此，因为由定理 1.1 得

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|x\|,$$

所以 T 还是連續的。又 $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$ 可由 $\|x\| \leq 1$ 上一致地 $\lim_{n\to\infty} \|Tx - T_n x\| = 0$ 的成立❷而得知。

共軛空間之例 首先，如我們所既知，Hilbert 空間 X 的共軛空間 X^* 和 X 是一致的（Riesz 定理 2.5）❸。

$C[0, 1]^*$ 定义在 $0 \leq t \leq 1$ 的可測函数 $x(t)$，只要存在着任一常数 c 能使

---

❶ 实数全体（或复数全体）作为以絕对值为范数的 1 維矢量空間构成一个 Banach 空間。

❷ 因 $\|Tx - T_n x\| = \lim_{m\to\infty} \|T_m x - T_n x\| \leq \lim_{m\to\infty} \|T_m - T_n\| \|x\|$。——校者注

❸ 但是我們必須注意，若 X 为复的 Hilbert 空間，X^* 到 X 的对应 $F \to x_F$：

$$F(y) = (y, x_F)$$

虽然是一对一的而且是等距的：$\|F\| = \|x_F\|$，但对应

$$\alpha F + \beta G \to x_{\alpha F + \beta G} = \bar{\alpha} x_F + \bar{\beta} x_G$$

并不保持加法关系。——校者注

$$\text{对于殆遍的 } t, \ |x(t)| \leqslant c < \infty \tag{19.2}$$

成立的，这种 $x(t)$ 的全体記为 $M[0, 1]$. 設以 $\|x\|$ 表示能使(19.2)成立的 c 的下确界并写作

$$\|x\| = \underset{0<t<1}{\text{ess. sup}} |x(t)| \text{①}, \tag{19.3}$$

則 $M[0, 1]$ 按照

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (ax)(t) = ax(t) \text{ 及上面的 } \|x\|$$

构成一个 Banach 空間。$C[0, 1]$ 的元，即在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 連續的函数自然也可看做是 $M[0, 1]$ 的元，从而 $C[0, 1]$ 是 $M[0, 1]$ 的子空間。

任意的 $f \in C[0, 1]^*$ 可保持范数地延拓成为 $M[0, 1]^*$ 的元 F. 因为

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t < s, \\ 0 & s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

属于 $M[0, 1]$，所以可考虑

$$v(s) = F(u_s(t)).$$

$v(s)$ 是 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 上的有界变差函数，这是因为，設

$$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = 1,$$

并令 $\varepsilon_i = \text{sgn}\,[v(s_i) - v(s_{i-1})]$ ②，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |v(s_i) - v(s_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [v(s_i) - v(s_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [F(u_{s_i}) - F(u_{s_{i-1}})] = F\left[\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (u_{s_i} - u_{s_{i-1}})\right],\end{aligned}$$

而由于 $\|F\| = \|f\|$ 得到

$$\sum_{i=1}^{n} |v(s_i) - v(s_{i-1})| \leqslant \|F\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (u_{s_i} - u_{s_{i-1}})\right\| = \|f\| \tag{19.4}$$

成立的緣故。

設 $x(t) \in C[0, 1]$，由于 $x(t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 一致連續，故对于

$$z_n(t) = \sum_{i=1}^{n} x\left(\frac{i}{n}\right) [u_{i/n}(t) - u_{(i-1)/n}(t)],$$

在 $M[0, 1]$ 的范数(19.3)的意义下 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - z_n\| = 0$ 成立，从而

---

① essential supremum $|x(t)|$ 乃是指无視在0測度的 x 集上的函数值时 $|x(t)|$ 的上确界，因此殆遍相等的函数 $x(t), y(t) \in M[0, 1]$ 看作是 $M[0, 1]$ 的同一矢量。

② $\text{sgn}\, a = \begin{cases} 1 & a \geqslant 0, \\ -1 & a < 0. \end{cases}$

$$f(x)=F(x)=\lim_{n\to\infty}F(z_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x\left(\frac{i}{n}\right)\left(v\left(\frac{i}{n}\right)-v\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)$$
$$=\int_0^1 x(t)\,dv(t)$$

成立。因此，令 $w(t)=v(t)-v(0)$，便知

对于每一个 $f\in C[0,1]^*$ 可确定一个满足 $w(0)=0$ 的有界变差函数 $w(t)$，使

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,dw(t),\ x\in C[0,1].$$

反之，凡可这样表示的 $f(x)$ 在 $C[0,1]$ 上是加法的，且因满足

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1|x(t)|\,d|w|(t)❶\leqslant\|x\|\times(w(t)\text{在}0\leqslant t\leqslant 1\text{的全变差}|w|(1))$$

f 是連續的，而且

$$\|f\|\leqslant w(t)\text{ 的全变差 }|w|(1).$$

把这和(19.4)結合起来便得

$$\|f\|=|w|(1). \tag{19.5}$$

因此，$C[0,1]^*$ 与 $w(0)=0$ 这种有界变差函数 $w(t)$ 的全体 $V[0,1]$ 形成一对一的对应❷，且成立着(19.5)。若定义这种 $w(t)$ 的范数为 $\|w\|=|w|(1)$，则 $V[0,1]$ 算得是 Banach 空間，而作为 Banach 空間 $C[0,1]^*$ 和 $V[0,1]$ 可看做是同一的东西，也就是說 $C[0,1]^*$ 和 $V[0,1]$ 是**同构的**(isomorphic) Banach 空間。

$L_1(\alpha,\beta)^*$ 和 $M[0,1]$ 完全同样地可以定义 $M[\alpha,\beta]$。$f\in L_1(\alpha,\beta)$ 与 $m_f(t)\in M[\alpha,\beta]$ 可凭满足下列条件使其一对一对应：

$$f(x)=\int_\alpha^\beta x(t)m_f(t)\,dt,\ x\in L_1(\alpha,\beta),\ \text{且}\ \|f\|=\|m_f\|. \tag{19.6}$$

在这意义之下 $L_1(\alpha,\beta)^*$ 和 $M[\alpha,\beta]$❸可看做是同构的 Banach 空間。設对于一切满足 $\alpha<c<e<\beta$ 的 $c<e$ 按

$$x_{c,e}(t)=\begin{cases}1 & c\leqslant t\leqslant e,\\ 0 & t<c\text{ 或 }t>e\end{cases}$$

---

❶ 对于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的有界变差函数 $w(t)$，$|w|(t_0)$ 表示 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 上 $w(t)$ 的全变差。

❷ 这里必须只考虑 $[0,1]$ 上的正規化的有界变差函数，例如只考虑适合条件 $w(x)=\dfrac{w(x+0)+w(x-0)}{2}$ 的函数，不然对应就不是一对一的。——校者注

❸ 此处原书作 $M[\alpha,\beta]^*$，有誤。——校者注

而定义 $x_{c,e}\in L_1(\alpha,\beta)$，则 $m_f(t)$ 乃是由

$$f(x_{c,e})=\int_c^e m_f(t)\,dt$$

所确定的函数 $\in M[\alpha,\beta]$❶.

定理 5.4 赋范空間 X 是和 Banach 空間 $X^{**}=(X^*)^*$ 的一个子空間同构的。

証明 对任一(固定的) $x\in X$，按

$$x^{**}(f)=f(x),\ \text{对一切}\ f\in X^*$$

定义了某一个 $x^{**}\in X^{**}$. 事实上，由于

$$x^{**}(\alpha f)=(\alpha f)(x)=\alpha f(x)=(\alpha\cdot x^{**})(f),$$

$$x^{**}(f+g)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^{**}(f)+x^{**}(g)$$

及

$$|x^{**}(f)|=|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|,$$

x^{**} 是 X^* 上的有界加法泛函，且 $\|x^{**}\|\leqslant\|x\|$.

此外，由于 $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$，可知对应

$$X\ni x_0\to x_0^{**}\in X^{**}$$

是一对一的❷，而且是加法的，也就是說，凭上面的对应有

$$\alpha x_0+\beta y_0\to\alpha x_0^{**}+\beta y_0^{**},$$

但因据定理5.1的系1有满足 $\|f_0\|=1$, $f_0(x_0)=\|x_0\|$ 的 $f_0\in X^*$ 存在，所以 $\|x_0^{**}\|\geqslant\|x_0\|$，从而与 $\|x_0^{**}\|\leqslant\|x_0\|$ 結合，得 $\|x_0^{**}\|=\|x_0\|$.

这样一来，凭对应 $x\to x^{**}$, X 便与 X^{**} 的一个子空間同构。

注意 当 X 非完备时，如考虑对应于 X 的 X^{**} 的子空間在 X^{**} 中的閉包，那么，它是 Banach 空間 X^{**} 的閉子空間，因此也是 Banach 空間。不妨将它看做是 X 的完备化(§5)。又即使 X 是完备的，X 和 X^{**} 不一定就是同构的，如象 $X=C[0,1]$, $L_1(\alpha,\beta)$ 等就是这样的例子❸。如果 X 和 X_{**} 同构，则 X 称为**正則的** (regular) 或**自反的** (reflexive) Banach 空間。就 Hilbert 空間 X 来說，由于 X 和 X^* 同构，所以 X 是自反的。

---

❶ 可参見例如吉田：位相解析 I (岩波)，p. 53.

❷ 一对一乃是定理 5.1 的系 1 的結果，也可以从下面的 $\|x^{**}\|=\|x\|$ 看出。——譯者注

❸ 吉田：位相解析 I (岩波)，p. 86.

§20 共轭算子

共轭算子 設 T 是定义在賦范空間 X 內稠密的子空間 $\mathfrak{D}(T)$ 而在賦范空間 X_1 內取值的加法算子。这时，如果对于 X_1^* 与 X^* 中的一对点 $\{f, f^*\}$，关系式

$$\text{对于一切的 } x \in \mathfrak{D}(T),\ f(Tx) = f^*(x) \tag{20.1}$$

成立[1]，则 f^* 是由 f 唯一决定的。事实上，假如对一切的 $x \in \mathfrak{D}(T)$，$f^*(x) = f_1^*(x)$，则由 $\mathfrak{D}(T)$ 在 X 內的稠密性与 f^* 及 f_1^* 的連續性必于一切的 $x \in X$ 有 $f^*(x) = f_1^*(x)$，也就是 $f^* = f_1^*$.

这样一来，通过

$$T^* f = f^* \tag{20.2}$$

就确定了一个从 X_1^* 內到 X^* 內的算子 T^*，T^* 的加法性可由 f 及 f^* 的加法性看出。这个 T^* 称为 T 的**共轭算子**。T^* 的定义域 $\mathfrak{D}(T^*)$ 是凡能成为上述点对 $\{f, f^*\}$ 的第一項的 f 的全体。

定理 5.5 若 T 为从賦范空間 X 到賦范空間 X_1 內的有界加法算子，则 T^* 为从 X_1^* 到 X^* 內的有界加法算子，而且

$$\|T^*\| = \|T\|. \tag{20.3}$$

証明 設 $f \in X_1^*$，$f(Tx)$ 当做 x 的函数是有界加法的，这可由

$$|f(Tx)| \leqslant \|f\| \cdot \|Tx\| \leqslant \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

看出，从而可写为 $f(Tx) = f^*(x)$，于此 $f \in X_1^*$，$f^* \in X^*$. 这样，T^* 便是对一切 $f \in X_1^*$ 被定义了的，而且由上式得 $\|f^*\| \leqslant \|f\| \cdot \|T\|$，从而 $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. 于是对于 $T^{**} = (T^*)^*$ 又有 $\|T^{**}\| \leqslant \|T^*\| \leqslant \|T\|$.

可是根据 T^{**} 的定义，它是从 X^{**} 到 X_1^{**} 內的有界加法算子，在看作是嵌入 X^{**} 內的(定理 5.4) X 的点 x 上有 $T^{**}x = Tx$[2]，即

---

[1] 这样的 X_1^*，X^* 的点对是存在的，例如 $\{0, 0\}$.

[2] 因为当固定 $x \in X$ 时，对一切 $f \in X_1^*$，有 $x^{**}(T^*f) = (T^*f)x = f(Tx) = (Tx)^{**}f$，故 $T^{**}x^{**} = (Tx)^{**}$，即 $T^{**}x = Tx$. ——譯者注

T^{**} 为 T 的由 X 到 X^{**} 的延拓。因此 $\|T^{**}\| \geq \|T\|$，从而

$$\|T^{**}\| = \|T^*\| = \|T\|.$$

共軛算子之例 1　設 T 为从实 Hilbert 空間 $(l_2(n))$ 到自身內的有界加法算子:

$$y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\} = T\cdot x = T\cdot\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}.$$

如果我們将 y 的分量 η 用 x 的分量 ξ 来表示，得到

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\xi_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

即 T 可照这样通过 n 阶方陣 (t_{ij}) 給出。因为 $(l_2(n))^* = (l_2(n))$，故 T^* 也可通过 n 阶方陣 (s_{ij}) 給出。又因

$$\text{对于一切的 } x \text{ 及 } z \in (l_2(n)),\quad (Tx, z) = (x, T^*z)$$

成立，即是

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}\xi_j\cdot\zeta_i = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\cdot s_{ij}\zeta_j,$$

故

$$s_{ij} = t_{ji}.$$

即 (t_{ij}) 是 (s_{ij}) 的行列互换后所成之**轉置矩陣**。共軛算子正是这种所謂轉置矩陣的概念在一般(实)賦范空間的"脫离坐标"(coordinate free) 的推广。

注意　如果 $(l_2(n))$ 的点 x 的坐标 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 允許是复数的話，那么由于 $(l_2(n))$ 里的內积成为 $(x, z) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\zeta}_i$，于是 $(Tx, z) = (x, T^*z)$ 成为

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij}\xi_j\cdot\bar{\zeta}_i = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\overline{s_{ij}\zeta_j}$$

而得

$$\bar{s}_{ij} = t_{ji}.$$

即在討論复賦范空間时 T^* 成为**复共軛轉置矩陣**的概念的一般化。

共軛算子之例 2　設 $K(t, s)$ 在 $0 \leq s, t \leq 1$ 上連續，考虑将 $L_2(0, 1)$ 的函数 $x(t)$ 映照到 $L_2(0, 1)$ 的函数

$$y(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)\,ds$$

的积分算子 K. K 是有界的，这是因为应用 Schwarz 不等式得

$$|y(t)|^2 \leq \int_0^1 |K(t, s)|^2 ds\cdot\int_0^1 |x(s)|^2 ds,$$

从而有

$$\|K\| \leq \left(\int_0^1\int_0^1 |K(t, s)|^2\,dt\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

的緣故。由 $f\in L_2(0,1)^*$ 确定了 $f(s)\in L_2(0,1)$ 使得 $f(y)$[1] 可表示为

$$f(y)=\int_0^1 y(s)\overline{f(s)}\,ds,\ y\in L_2(0,1),$$

故

$$f(Kx)=\int_0^1\left(\int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt\right)\overline{f(s)}\,ds=\int_0^1 x(t)\left(\int_0^1 K(s,t)\overline{f(s)}\,ds\right)dt$$
$$=\int_0^1 x(t)\left(\int_0^1\overline{\overline{K(s,t)}f(s)\,ds}\right)dt=\int_0^1 x(t)\,\overline{f^*(t)}\,dt$$

从而得
$$f^*(t)=\int_0^1\overline{K(s,t)}f(s)\,ds.$$

因此，K 的共轭算子乃是以 $K^*(t,s)=\overline{K(s,t)}$ 为核的积分算子。

共轭算子之例 3（量子力学中的坐标算子） 考虑以 Hilbert 空間 $X=L_2(-\infty,\infty)$ 中所有使 $tx(t)$ 仍属于 $L_2(-\infty,\infty)$ 的这种函数 $x(t)$ 为定义域 $\mathfrak{D}(T)$，而将 $\mathfrak{D}(T)$ 的函数 $x(t)$ 映照成 $tx(t)$ 的算子 T，这算子 T 称为**坐标算子**。現証 $T^*=T$。首先 $\mathfrak{D}(T)$ 在 $L_2(-\infty,\infty)$ 内是稠密的，这由有限区間外成为 0 的連續函数 $x(t)$ 的全体在 $L_2(-\infty,\infty)$ 內稠密，而这样的 $x(t)$ 又属于 $\mathfrak{D}(T)$ 的事实即可知道。設 $y(t)\in\mathfrak{D}(T^*)$ 且 $T^*y=y^*$，則

$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\overline{y^*(t)}\,dt\quad(x(t)\in\mathfrak{D}(T)\text{时}).\quad(20.4)$$

如果現在令 $x(t)$ 为在有限区間 (α,t_0) 上为 1 而在此区間以外为 0 的函数，則

$$\int_\alpha^{t_0} t\,\overline{y(t)}\,dt=\int_\alpha^{t_0}\overline{y^*(t)}\,dt.$$

因此，由不定积分的微分定理，对于殆遍的 t_0 必有 $t_0\overline{y(t_0)}=\overline{y^*(t_0)}$。也就是說，这时必然 $y\in\mathfrak{D}(T)$ 且 $T^*y=y^*=Ty$。反之，如果对于 $y\in\mathfrak{D}(T)$ 这种的 y，令 $y^*(t)=ty(t)$，則(20.4)成立更是显然的事实，因此 $T^*=T$。

共轭算子之例 4（量子力学中的动量算子） 考察 Hilbert 空間 $X=L_2(-\infty,\infty)$ 的下述函数 $x(t)$，它在 $-\infty<t<\infty$ 上是絕对連續且其导函数[2] $x'(t)$ 仍属于 $L_2(-\infty,\infty)$ 的，以这种函数的全体为定义域 $\mathfrak{D}(T)$，而将 $\mathfrak{D}(T)$ 的函数 $x(t)$ 映照成 $\frac{1}{\sqrt{-1}}x'(t)$ 的算子 T，称为**动量算子**。現証 $T^*=T$。首先，$\mathfrak{D}(T)$ 在 $L_2(-\infty,\infty)$ 內显然是稠密的，这是因为在有限区間外为 0 的一次連續可微函数 $x(t)$ 的全体在 $L_2(-\infty,\infty)$ 內稠密，而这样的 $x(t)$ 又属于

[1] 这里 $f(y)$ 表示泛函 f 在矢量 $y\in L_2(0,1)$ 的泛函数值。——校者注

[2] 絕对連續函数 $x(t)$ 的导函数 $x'(t)$ 殆遍存在。可参見本丛书，河田敬義著《集合·拓扑·测度》。

$\mathfrak{D}(T)$ 的緣故。設 $y(t)\in\mathfrak{D}(T^*)$ 且 $T^*y=y^*$，則

$$\int_{-\infty}^{\infty} i^{-1}x'(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y^*(t)}\,dt \quad (x(t)\in\mathfrak{D}(T)\text{时}),\quad (20.5)$$

如果在此令 $x(t)$ 为

$$\left.\begin{array}{l}\text{在 } a\leqslant t\leqslant t_0,\ x(t)=1,\\ \text{在 } t\leqslant a-n^{-1} \text{ 及 } t\geqslant t_0+n^{-1},\ x(t)=0,\\ \text{在 } a-n^{-1}\leqslant t\leqslant a \text{ 及 } t_0\leqslant t\leqslant t_0+n^{-1},\ x(t)\text{为綫性函数}\end{array}\right\}$$

这样的連續函数，并將它写作 $x_n(t)$，則

$$n\int_{a-n^{-1}}^{a} i^{-1}\overline{y(t)}\,dt-n\int_{t_0}^{t_0+n^{-1}} i^{-1}\overline{y(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} x_n(t)\,\overline{y^*(t)}\,dt.$$

从而，当 $n\to\infty$ 时，由不定积分的微分定理，在殆遍的 a, t_0,

$$i^{-1}[\overline{y(a)}-\overline{y(t_0)}]=\int_a^{t_0}\overline{y^*(t)}\,dt.$$

由于可表为不定积分，$y(t_0)$ 是絕对連續的，而且再由不定积分的微分定理，在殆遍的 t_0 必 $i^{-1}y'(t_0)=y^*(t_0)$. 也就是說，这时必 $y\in\mathfrak{D}(T)$ 且 $y^*=T^*y=Ty$. 反之，对于 $y\in\mathfrak{D}(T)$ 可取 $y^*(t)=i^{-1}y'(t)$，这只需将 (20.5) 分部积分即可知道。事实上，$x(t)$, $y(t)\in\mathfrak{D}(T)$ 是連續的且 $\in L_2(-\infty,\infty)$，从而使 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\infty$ 时能令 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[x(t)\,\overline{y(t)}\right]_{-t_n}^{t_n}=0$ 的这种 $\{t_n\}$ 必存在，这样便得 $T=T^*$.

第6章 共鳴定理,弱收斂,遍历理論

Banach 空間 X 的点列 $\{x_n\}$,即使不按范数收斂,但对于所有的 $f\in X^*$,数列 $\{f(x_n)\}$ 都收斂的情形却是有的。例如 Hilbert 空間 X 的就范正交系 $\{\varphi_n\}$,如同 Bessel 不等式(11.1)所示,对于所有的 $f\in X=X^*$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}(f,\ \varphi_n)=0.$$

可是,由于当 $n\neq m$ 时,

$$\begin{aligned}\|\varphi_n-\varphi_m\|^2&=(\varphi_n-\varphi_m,\ \varphi_n-\varphi_m)\\&=\|\varphi_n\|^2-(\varphi_n,\ \varphi_m)-(\varphi_m,\ \varphi_n)+\|\varphi_m\|^2\\&=1-0-0+1=2,\end{aligned}$$

$\{\varphi_n\}$ 并不按范数收斂。在上面这种情形,我們說 $\{\varphi_n\}$ 是弱收斂于0。在分析学的許多問題中,如象断言"对于弱收斂的点列 $\{x_n\}$,$\{\|x_n\|\}$ 为有界数列"的共鳴定理或者"Hilbert 空間的单位球 $\{x;\|x\|\leqslant 1\}$ 关于弱收斂为緊致"等这些可以統一于弱收斂概念的事例是不少的。还有,作为可以归到弱收斂与强收斂(按范数的收斂)的等价性这种形式的分析学定理的典型,我們可以举出 von Neumann 的平均遍历定理。由这个定理与 G. D. Birkhoff 的个别遍历定理,便奠定了古典統計力学的数学的基础。

§21 共 鳴 定 理

首先叙述 Гельфанд 的引理❶。

定理 6.1 (Гельфанд) 設在整个 Banach 空間 X 上定义的实

---

❶ И. М. Гельфанд: Зап. Харьк. Матем. О-ва, (4) 13 (1936), 35～40.

函数 $p(x)$ 滿足❶

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),\ p(\alpha x)=|\alpha|p(x)\quad (\text{次加法性})❷, \tag{21.1}$$

$$0\leqslant p(x)<\infty\quad (\text{有限性}). \tag{21.2}$$

这时存在正数 γ 使

$$\text{对于所有的 } x\in X,\ p(x)\leqslant\gamma\|x\|\quad (\text{有界性}) \tag{21.3}$$

成立的充要条件为 $p(x)$ 下半連續(lower semicontinuous)，也就是説，

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于任意的 } x_0\in X \text{ 与任意的 } \varepsilon>0,\\ \text{存在 } \delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0, \text{使得只要}\\ \|x-x_0\|\leqslant\delta, \text{就有 } p(x)\geqslant p(x_0)-\varepsilon\end{array}\right\} \tag{21.4}$$

成立。

証明(必要性)　因为 $p(x_0)=p(x_0-y+y)\leqslant p(x_0-y)+p(y)$，和 $0\leqslant p(y)\leqslant\gamma\cdot\|y\|$，所以如果取使得 $\gamma\cdot\delta\leqslant\varepsilon$ 的 δ，(21.4) 就成立。

(充分性)　如果 $p(x)$ 在以 x_0 为中心，δ 为半徑的閉球

$$K=\{x;\ \|x-x_0\|\leqslant\delta\}$$

上有界，并設 $p(x)\leqslant\gamma_1$，那么，由于 x_0 与 x_0+y 都 $\in K$，必有

$$\begin{aligned}p(y)&=p(-x_0+x_0+y)\leqslant p(-x_0)+p(x_0+y)\\&=p(x_0)+p(x_0+y)\leqslant 2\gamma_1,\end{aligned}$$

这时取 $\gamma=2\gamma_1/\delta$ 的話 (21.3) 成立。因此，假如不存在使 (21.3) 成立的正数 γ，那么，在无論怎样的閉球 K_0 上 $p(x)$ 势必都是无界的，从而必存在 K_0 的内点 x_1 使 $p(x_1)>1$，而由于 p 的下半連續性，必又可作出以 x_1 为中心、半徑 δ_1 充分小的閉球 K_1，使得

$$K_0\supseteq K_1,\ \delta_1<1,\ \text{且于 } K_1 \text{ 的各点 } p(x)>1.$$

---

❶　如象 $p(x)=\|\delta x\|$ (δ 为常数)便是这样的 p 的例子。

❷　subadditivity.

継續这样，便可选出点列 $\{x_n\}$ 和以 x_n 为中心、δ_n 为半徑的閉球 K_n 的叙列，使得

$$K_{n-1}\supseteq K_n,\ 0<\delta_n<n^{-1},\ \text{且于 } K_n \text{ 的各点 } p(x)>n.$$

这么一来，当 $m>n$ 时，由于 $x_m\in K_n$，必 $\|x_m-x_n\|\leqslant\delta_n$，从而 $\{x_n\}$ 滿足收斂条件。設 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，由于范数的連續性，必 $\|x-x_n\|\leqslant\delta_n$ 亦卽 $x\in K_n$。由这样得着 $p(x)>n$ $(n=1, 2, \cdots)$，和 (21.2) 相反。

作为上面引理的应用，可得到**共鳴定理**(resonance theorem)，卽

定理 6.2 (Banach) 如果在 Banach 空間 X 上定义的而在賦范空間 X_1 内取值的有界加法算子 T_n 的列 $\{T_n\}$ 滿足条件：

$$\text{对于一切的 } x\in X,\ \{\|T_nx\|\} \text{ 都是有界数列}, \tag{21.5}$$

那么，与此"共鳴"，$\{\|T_n\|\}$ 也成有界数列。

証明 考虑 $p(x)=\sup\limits_{n\geqslant1}\|T_nx\|$，它滿足 (21.1)，(21.2)。又 $p(x)$ 是下半連續的，这从它是連續函数列 $\{\|T_nx\|\}$ 的 sup 的事实卽可知道。实际上，首先存在着这样的 n，使 $p(x_0)-\varepsilon/2\leqslant\|T_nx_0\|$。由 $\|T_nx\|$ 的連續性又存在着 $\delta=\delta(x_0, n, \varepsilon)>0$，使得当 $\|x-x_0\|\leqslant\delta$ 时有 $\|T_nx_0\|-\varepsilon/2\leqslant\|T_nx\|$，从而也有

$$p(x_0)-\varepsilon\leqslant\|T_nx\|\leqslant p(x)$$

成立。

于是由前定理存在 $\gamma>0$ 使

$$\|T_nx\|\leqslant p(x)\leqslant\gamma\cdot\|x\| \quad (x\in X;\ n=1, 2, \cdots). \tag{21.6}$$

系 若上面的 $\{T_n\}$ 滿足条件：

$$\text{对于一切的 } x\in X,\ \lim_{n\to\infty}T_nx=Tx, \tag{21.5$'$}$$

則 $\{\|T_n\|\}$ 为有界，且 T 为有界加法算子使

$$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\| \tag{21.7}$$

成立。

証明 随着各个 T_n,自然 T 也同时成为加法的,从而由(21.6)与范数的連續性即可推得(21.7)。

§ 22 弱收斂与强收斂

弱收斂 如果对于 Banach 空間 X 的点列 $\{x_n\}$ 与 X 的点 x_0,

$$\text{对于一切的 } f\in X^*,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0) \tag{22.1}$$

成立,则称 $\{x_n\}$ **弱收斂于** x_0,并記作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$(弱),$\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 或 $x_n\to x_0$ (弱)等。

例 $L_2(0,1)$ 的函数列 $\{x_n(t)\}$,$x_n(t)=\sin n\pi t$ 弱收斂于 0。事实上,因为对于任意的 $f\in L_2(0,1)^*=L_2(0,1)$ 可确定 $y_f(t)\in L_2(0,1)$,使

$$f(x_n)=\int_0^1 y_f(t)x_n(t)\,dt=\int_0^1 y_f(t)\sin n\pi t\,dt,$$

故 $f(x_n)$ 为 $y_f(t)$ 关于 $\{\sin n\pi t\}$ 的(第 n 个) Fourier 系数,从而由 Bessel 不等式(11.1),随着 $n\to\infty$ 而收斂于 0。

强收斂 相对于弱收斂而言,按范数收斂 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$ 称为**强收斂**,并記作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ (强),$\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 或 $x_n\to x_0$ (强)。

定理 6.3 (i) 若 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,则 $\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$。(ii)若 $\{x_n\}$ 弱收斂,则其弱极限 $\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 唯一确定。(iii) 即使 $\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,也不一定 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$。(iv)若 $\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,则

$$\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|\geqslant\|x_0\|.$$

証明 (i) 对于 $f\in X^*$,$|f(x_0)-f(x_n)|=|f(x_0-x_n)|\leqslant\|f\|\cdot\|x_0-x_n\|$。此式的最右边 $\to 0$ $(n\to\infty)$。(ii) 假如 x_0 以外还有弱极限 x_0',则对于一切 $f\in X^*$ 势必 $f(x_0)=f(x_0')$,从而

$$f(x_0-x_0')=0.$$

如果 $x-x_0'\neq 0$ 的話,将和定理 5.1 的系 1 相違反。(iii) $L_2(0,1)$

中的 $\{\sin n\pi t\}$ 虽然弱收斂于 0，但由于

$$\|\sin n\pi t\| = \left(\int_0^1 \sin^2 n\pi t\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$\{\sin n\pi t\}$ 并不强收斂于 0。(iv) $\{x_n\}$ 按

$$X_n \cdot f = f(x_n) \quad (n=1, 2, \cdots)$$

定义了从 X^* 到数体的有界加法算子 X_n 的叙列，而且

$$\lim_{n\to\infty} X_n f = X_0 f.$$

由于这时 $\|X_n\| = \|x_n\|$ 有如在定理 5.4 的証明中所示，依 (21.7) 即得

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x_0\|.$$ 証毕

定理 6.4 (i) 如果对于 Hilbert 空間 X 的点列 $\{x_n\}$，$\{\|x_n\|\}$ 为有界数列，那么 $\{x_n\}$ 的适当的子列 $\{x_{n'}\}$ 将是弱收斂的。(ii) 如果 Hilbert 空間 X 的点列 $\{x_n\}$ 弱收斂于 $x_0 \in X$，且

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|,$$

那么 $\{x_n\}$ 也强收斂于 x_0。

証明 (ii) $\|x_n - x_0\|^2 = (x_n - x_0,\ x_n - x_0) = \|x_n\|^2 - (x_n,\ x_0) - (x_0,\ x_n) + \|x_0\|^2$，当 $n \to \infty$ 时，$\to \|x_0\|^2 - 2(x_0,\ x_0) + \|x_0\|^2 = 0$。

(i) 尽可設 $\|x_n\| \leqslant 1$ 而不丧失一般性。由于 X 中形如 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ (α_i 的实部和虚部同为有理数；m 为任意的正整数) 的元素全体是可数的，可以把它們排列成元素列 $\{y_m\}$。設 $\mathfrak{M}$ 表示这种元素全体再添上它們的按范数意义收斂的所有极限点后所得的集合，則 $\mathfrak{M}$ 为 X 的閉子空間而且是可分的，即 $\mathfrak{M}$ 成为可分 Hilbert 空間而 $\{y_m\}$ 在 $\mathfrak{M}$ 内稠密。

对于每个 y_m，数列 $\{(x_n,\ y_m)\}_{n=1, 2, \cdots}$ 是有界的。理由是

$$|(x_n,\ y_m)| \leqslant \|x_n\| \cdot \|y_m\|.$$

因此可凭对角綫方法选出适当的子列 $\{x_{n'}\}$，使得对于一切 y_m 存

在着有限的 $\lim_{n'\to\infty}(x_{n'}, y_m)$. 这便是按照下面的方法选取出的：根据 Bolzano-Weirstrass 定理，从有界数列 $\{(x_n, y_1)\}_{n=1,2,\cdots}$ 选出收斂的子列

$$(x_{11}, y_1), (x_{21}, y_1), (x_{31}, y_1), \cdots.$$

同样从有界数列

$$(x_{11}, y_2), (x_{21}, y_2), (x_{31}, y_2), \cdots$$

选出收斂的子列

$$(x_{12}, y_2), (x_{22}, y_2), (x_{32}, y_2), \cdots.$$

照此依次从有界数列

$$(x_{1,k-1}, y_k), (x_{2,k-1}, y_k), (x_{3,k-1}, y_k), \cdots$$

选出收斂的子列

$$(x_{1,k}, y_k), (x_{2,k}, y_k), (x_{3,k}, y_k), \cdots.$$

一直继續下去。然后取对角綫上的元素

$$x_{n'} = x_{n,n}$$

选出了 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n'}\}$，那么对于一切 m，

$$(x_{1'}, y_m), (x_{2'}, y_m), (x_{3'}, y_m), \cdots$$

自然都是收斂数列了。

由于 $\{y_m\}$ 在 $\mathfrak{M}$ 内按范数意义稠密，故对于任意的 $y\in\mathfrak{M}$ 与任意的 $\varepsilon>0$，存在 y_{m_0} 使 $\|y-y_{m_0}\|<\varepsilon$. 因此得

$$\begin{aligned}
&|(x_{n'}, y)-(x_{k'}, y)|\\
&\quad=|(x_{n'}, y)-(x_{n'}, y_{m_0})+(x_{n'}, y_{m_0})-(x_{k'}, y_{m_0})\\
&\qquad+(x_{k'}, y_{m_0})-(x_{k'}, y)|\\
&\quad\leqslant\|x_{n'}\|\cdot\|y-y_{m_0}\|+|(x_{n'}-x_{k'}, y_{m_0})|+\|x_{k'}\|\cdot\|y_{m_0}-y\|\\
&\quad\leqslant 1\cdot\varepsilon+|(x_{n'}-x_{k'}, y_{m_0})|+1\cdot\varepsilon.
\end{aligned}$$

右边第2項当 $n', k'\to\infty$ 时收斂于0. 从而数列 $\{(x_{n'}, y)\}$ 收斂。不仅如此，对于任意的 $z\in X$，如果令 $P(\mathfrak{M})z=y$ 的話，那么，由于 $x_{n'}\in\mathfrak{M}$ 有

$$(x_{n'}, z) = (P(\mathfrak{M})x_{n'}, z) = (x_{n'}, P(\mathfrak{M})z) = (x_{n'}, y),$$

而因 $y \in \mathfrak{M}$，可見$\{(x_{n'}, z)\}$也收斂。在此若令 $f(z) = \lim\limits_{n' \to \infty} (z, x_{n'})$，则由定理 6.2 系，$f(z)$ 成为 X 上的有界加法泛函，从而由 Riesz 定理 2.5，存在 $x_0 \in X$，使 $f(z) = (z, x_0)$。

这样就証明了 $\lim\limits_{n' \to \infty} x_{n'} = x_0$ (弱)。

$L_1(\alpha, \beta)$ 中的弱收斂 $L_1(\alpha, \beta)$ 的点列 $\{x_n\}$ 含有弱收斂于 $L_1(\alpha, \beta)$ 中点的子列的充要条件为

$\{x_n(t)\}$ 等度可积 (equi-integrable)，也就是說，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 可确定 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得当可測集 $E \subseteqq (\alpha, \beta)$ 的測度 $|E| \leqslant \delta$ 时总有

$$\int_E |x_n(t)| dt \leqslant \varepsilon \quad (n = 1, 2, \cdots).$$
❶❷

$C[0, 1]$ 中的强收斂 在这方面，下述的定理是基本的。

定理 6.5 (Ascoli-Arzelà) 設在閉区間 $[0, 1]$ 上定义的复值連續函数列 $\{x_n(t)\}$ 为**等度有界**：

$$\sup_{1 \leqslant n, t \in [0, 1]} |x_n(t)| < \infty, \tag{22.2}$$

且**等度連續**：

$$\left.\begin{aligned}&\text{对于任意的 } \varepsilon > 0 \text{ 可确定 } \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ 使得} \\ &\text{当 } |x_1 - x_2| \leqslant \delta \text{ 时，总有 } |x_n(t_1) - x_n(t_2)| \leqslant \varepsilon \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (n = 1, 2, \cdots).\end{aligned}\right\} \tag{22.3}$$

这时必可选出适当的子(函数)列 $\{x_{n'}(t)\}$，使 $\{x_{n'}(t)\}$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 一致收斂。

証明 由于有理数的全体是可数的，滿足 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 的有理数 y 的全体，可以排列成數列 $\{y_m\}$。由于 (22.2)，我們可以和在前

---

❶ 証明見吉田：位相解析 I (岩波)，p. 68.

❷ 原书有誤，这只是充分条件；但这是"$\{x_n\}$的任何子列自身还含有弱收斂的子列"(即$\{x_n\}$为弱紧)的充要条件。——譯者注

定理証明中一样，利用对角綫方法选出 $\{x_n(t)\}$ 的子函数列 $\{x_{n'}(t)\}$，使得

$$\text{对于一切的 } m, \ \{x_{n'}(y_m)\} \text{ 都收斂。} \tag{22.4}$$

但因 $\{y_m\}$ 在有界閉区間 $[0, 1]$ 內稠密，对于任意的 $\delta>0$，只需取 $N=N(\delta)$ 充分大，必可使

$$\min_{1\leqslant m\leqslant N} |t-y_m| \leqslant \delta$$

对于 $[0, 1]$ 的一切点 t 成立。又因有 (22.4)，对于充分大的 $M=M(\varepsilon)>0$，将有

$$\text{若 } n, k\geqslant M, \text{ 則 } |x_n(y_m)-x_k(y_m)| \leqslant \varepsilon \quad (m=1, 2, \cdots, N) \tag{22.5}$$

成立。

因此，当 $n', k'\geqslant M$ 时，对每个 $t\in[0, 1]$，只需适当地取 $y_{m_0}(1\leqslant m_0\leqslant N)$，由 (22.3) 与 (22.5) 即得

$$\begin{aligned}|x_{n'}(t)-x_{k'}(t)| &\leqslant |x_{n'}(t)-x_{n'}(y_{m_0})| + |x_{n'}(y_{m_0})-x_{k'}(y_{m_0})| \\ &\quad + |x_{k'}(y_{m_0})-x_{k'}(t)| \leqslant \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon,\end{aligned}$$

这就是說，$\{x_{n'}(t)\}$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上一致收斂。

§23 G. D. Birkhoff 的个别遍历定理及 J. von Neumann 的平均遍历定理

考虑在 Euclid 空間的有界域 Ω 內流动的不可压縮穩定流。設通过該流，Ω 的点 ω 在 n 单位时間后被移至 Ω 的点 ω_n:

$$\omega\to\omega_n \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots; \omega_0=\omega), \tag{23.1}$$

因为所謂穩定的假定意味着流的情况与时間的原点如何取法无关，所以具有群的性质

$$(\omega_n)_m=\omega_{n+m}. \tag{23.2}$$

所謂不可压縮性解释为如下的意义，即假定当集合 $A\subseteqq\Omega$ 在 n 个单位时間后被移于 A_n 时 $(A_n=\{\omega_n;\ \omega\in A\})$，当且仅当 A (在

Lebesgue 意义下)可测时 A_n 为可测，而且其 Lebesgue 测度(記做 $|\ |$) 滿足

$$|A_n| = |A|. \tag{23.3}$$

这样的变换 $\omega \to \omega_m = \omega_m(\omega)$ 称为**保测变换**。用統計力学的話来說，那就是当給定的力学系的可能状态用**相空間** (phase space) Ω 的点 ω 来表示时，随着时間的进展，力学体系的发展可看做是它所引起的**迁移过程** (23.1)，并且滿足(23.2)与(23.3)；而 (23.3)无非是要求所謂 **Liouville 定理**成立。

在上述的迁移过程中，对时間 $n \to \infty$ 时的状况根据 Lebesgue 测度論統計地加以研究，这就是遍历理論(ergodic theory)的出发点。例如在 Ω 内固定一个可测集 A，考虑 A 的特征函数

$$x_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A, \\ 0 & \omega \overline{\in} A. \end{cases} \tag{23.4}$$

如果在 Ω 内取一点 ω 而作 $n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1} x_A(\omega_m)$ 的話，那么这表示运动点从 ω 出发在 n 单位时間内——設在整数个单位时刻进行测定——訪 A(即落在 A 中)的次数除以 n 的比。这个分数当 $n \to \infty$ 时是否趋近一个确定的极限呢？也就是說，从 ω 出发到 A 的**平均訪問次数**(mean sojourn)是否存在呢？对此下面的三个定理成立。

定理 6.6 (G. D. Birkhoff[1]) 如果 $x(\omega) \in L_1(\Omega)$，即 $x(\omega)$ 为在 Ω 内(Lebesgue)可积的复値函数，那么，对于殆遍的出发点 $\omega = \omega_0$，有限的

$$\text{时間平均 } x^*(\omega) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} x(\omega_m) \tag{23.5}$$

存在，而且

$$\int_\Omega x^*(\omega)\,d\omega = \int_\Omega x(\omega)\,d\omega. \tag{23.6}$$

---

[1] Proc. Nat. Acad. Sci., **18** (1932), 650.

此外，$x^*(\omega)$ 对于时間的經过保持不变，即对于殆遍的 ω，

$$x^*(\omega_k)=x^*(\omega) \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots). \tag{23.7}$$

定理 6.7(J. von Neumann[1]) 如果 $x(\omega)\in L_2(\Omega)$，即 $x(\omega)$ 为可测函数[2]，而且 $|x(\omega)|^2$ 为在 Ω 内 (Lebesgue) 可积的复値函数，那么滿足

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}x(\omega_m)-x^*(\omega)\right|^2 d\omega=0 \tag{23.8}$$

的 $x^*(\omega)\in L_2(\Omega)$ 存在，而且(23.6)，(23.7)成立。

定理 6.8 (23.5)及(23.8)分別可使成为更确切的

$$x^*(\omega)=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}x(\omega_m)=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{m=0}^{-n+1}x(\omega_m) \tag{23.5'}$$

(对于殆遍的出发点 $\omega=\omega_0$ 成立)

及

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}x(\omega_m)-x^*(\omega)\right|^2 d\omega$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|n^{-1}\sum_{m=0}^{-n+1}x(\omega_m)-x^*(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{23.8'}$$

扼要地說，即

将来的时間平均等于过去的时間平均。 (23.9)

注 因为定理 6.6 保証着关于 Ω 中各(确切地說，殆遍的)个別出发点 ω 的时間平均 $X^*(\omega)$ 的存在，所以称它为**个別遍历定理**。因为定理 6.7 保証着在 $L_2(\Omega)$ 范数意义下，即所謂**平方平均收敛**(mean convergence)意义下时間平均 $x^*(\omega)$ 的存在，所以称它为**平均遍历定理**。

基于这几个定理，遍历理論就可以建立起来，关于这个問題后面还会讲到，現在先給出它們的証明。

§24 个別遍历定理的証明

定理 6.6 的証明[3] 只需就 $x(\omega)\in L_1(\Omega)$ 是实函数的情形来

---

[1] Proc. Nat. Acad. Sci., 18 (1932), 70.

[2] 此地原书少写“$x(\omega)$ 是可测函数”。——校者注

[3] A. Колмогоров, Матем. сб. 44 (1937), 366.

証明就够了。又只需指出对于殆遍的 ω 存在有限的

$$x^*(\omega)=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{m=1}^{n} x(\omega_m),$$

而且 $\int_\Omega x^*(\omega)\,d\omega=\int_\Omega x(\omega)d\omega$ 成立即可❶。

首先，为了指出 $x^*(\omega)$ 的存在，只需指出当 $\alpha<\beta$ 时，如果以 N 表示能使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1}\sum_{m=1}^{n} x(\omega_m)>\beta,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1}\sum_{m=1}^{n} x(\omega_m)<\alpha$$

同时成立的 ω 的集合，则 N 的測度 $|N|$ 为 0。为了指出 $|N|=0$，只需指出

$$\int_N x(\omega)\,d\omega\,❷\geqslant|N|\cdot\beta. \tag{24.1}$$

因为同样也有 $\int_N x(\omega)d\omega$❷ $\leqslant|N|\cdot\alpha$，从而由 $\alpha<\beta$ 即可得

$$|N|=0.$$

现在一般地令 $y_{a,b}(\omega)=(b-a)^{-1}\sum_{m=a}^{b-1} x(\omega_m)$，（$a$, b 整数，$a<b$）。对于某个 ω，如果存在满足

$$y_{a,b}(\omega)>\beta \text{ 且当 } a\leqslant b'<b \text{ 时 } y_{a,b'}(\omega)\leqslant\beta$$

的整数 a, b，则以 a, b 为端点的区間 (a, b) 称为对应于 ω 的特异区間。因为当 $a<a'<b$ 时有

$$y_{a,b}(\omega)=(b-a)^{-1}\{(a'-a)y_{a,a'}(\omega)+(b-a')y_{a',b}(\omega)\},$$

所以，当我們考虑对应于同一个 ω 的两个特异区間 (a, b), (a', b')，除了可能有一方包含另一方的情形以外，不会有相重合的部分。給定 ω 与正整数 l 时，如果 (a, b) 的长度 $(b-a)\leqslant l$，而且是对应于 ω 的特异区間，但不被包含于其他的、长度不超过 l 的特异区間（对应于同一 ω 的）之內的，我們便称 (a, b) 为对应于 ω 的 l-特异

---

❶ 因为(23.7)由(23.2)容易看出。——譯者注

❷ 此地原书为 $\int_\Omega x(\omega)d\omega$，有誤。——校者注

区間。由上所述，对应于給定的 ω 的 l-特异区間，假如不止一个的話，它們必然是彼此互相分离的。

由集合 N 的定义，对于 N 中任意的点 ω，只要 l 取得充分大，象 $a\leqslant 0<b$ 这样的 l-特异区間 (a, b) 必然唯一地存在。对于固定的 l，以 N_l 表示 N 的点中有含 0 的 l-特异区間和它对应的那些点的全体，那么

$$N_1\subseteqq N_2\subseteqq N_3\subseteqq\cdots \text{ 且和集 } \bigcup_{l=1}^{\infty} N_l=N.$$

又 N_l 可表示成相互沒有公共点的 $N_{p,q}$ 的和集

$$N_l=\sum_{q=1}^{l}\sum_{p=0}^{q-1} N_{p,q}.$$

在此 $N_{p,q}$ 为 N_l 的点中有 l-特异区間 $(-p, -p+q)$ 和它对应的那些点的全体所成的集合。

但由于

$$y_{-p,-p+q}(\omega)=q^{-1}\sum_{m=-p}^{-p+q-1} x(\omega_m)=y_{0,q}(\omega_{-p}),$$

$\omega\in N_{p,q}$ 与 $\omega_{-p}\in N_{0,q}$ 是等价的，从而由 (28.3)，

$$|N_{p,q}|=|N_{0,q}| \text{ 且 } \int_{N_{p,q}} x(\omega)\,d\omega=\int_{N_{0,q}} x(\omega_p)\,d\omega.$$

因此

$$\int_{N_l} x(\omega)\,d\omega=\sum_{q=1}^{l}\sum_{p=0}^{q-1}\int_{N_{p,q}} x(\omega)\,d\omega=\sum_{q=1}^{l}\sum_{p=0}^{q-1}\int_{N_{0,q}} x(\omega_p)\,d\omega$$
$$=\sum_{q=1}^{l} q\int_{N_{0,q}} y_{0,q}(\omega)\,d\omega.$$

如果 $\omega\in N_{0,q}$，那么由于 $y_{0,q}(\omega)>\beta$，

$$\int_{N_l} x(\omega)\,d\omega\geqslant\beta\sum_{q=1}^{l} q|N_{p,q}|=\beta\sum_{q=1}^{l}\sum_{p=0}^{q-1}|N_{p,q}|=\beta|N_l|.$$

因此，令 $l\to\infty$ 即得

$$\int_N x(\omega)\,d\omega\geqslant\beta\cdot|N|.$$

最后(23.6)的証明　首先，对于不取負值的函数列

$$\left\{\left|n^{-1}\sum_{m=1}^{n}x(\omega_m)\right|\right\}_{n=1,2,\cdots}$$

应用 Lebesgue-Fatou 定理得

$$\int_\Omega \varliminf_{n\to\infty}\left|n^{-1}\sum_{m=1}^{n}x(\omega_m)\right|d\omega \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega\left|n^{-1}\sum_{m=1}^{n}x(\omega_m)\right|d\omega$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{m=1}^{n}\int_\Omega|x(\omega_m)|\,d\omega.$$

此式的左边 $=\int_\Omega|x^*(\omega)|d\omega$，又最右边由于(23.3)而等于

$$\int_\Omega|x(\omega)|d\omega.$$

因此

$$x^*(\omega)\text{ 可积且 }\int_\Omega|x^*(\omega)|d\omega\leqslant\int_\Omega|x(\omega)|\,d\omega. \tag{24.2}$$

另一方面，若将可积的 $x(\omega)$ 写成

$$x(\omega)=x_1(\omega)-x_2(\omega)$$

$$=\frac{1}{2}\{|x(\omega)|+x(\omega)\}-\frac{1}{2}\{|x(\omega)|-x(\omega)\},$$

立知 $x_1(\omega)$ 和 $x_2(\omega)$ 两者总是 $\geqslant 0$ 而且是可积的，并且

$$x^*(\omega)=x_1^*(\omega)-x_2^*(\omega).$$

因此只需对于不取負值的函数如象 $x_1(\omega)$ 或 $x_2(\omega)$ 証明(23.6)就行了。从而可以假定 $x(\omega)$ 恒 $\geqslant 0$，那么，由(24.2)首先有

$$\int_\Omega x^*(\omega)d\omega\leqslant\int_\Omega x(\omega)d\omega.$$

为了要証相反的不等式，让我們注意，和前面証明(24.1)相彷，可得到如下的事实，即当 $\alpha<\beta$ 时，

$$\left.\begin{array}{c}\text{对于满足 }\alpha<x^*(\omega)\leqslant\beta\text{ 的 }\omega\text{ 全体所成的集合 }N(\alpha,\beta),\\ \alpha\cdot|N(\alpha,\beta)|\leqslant\int_{N(\alpha,\beta)}x(\omega)d\omega\leqslant\beta\cdot|N(\alpha,\beta)|\end{array}\right\}$$

成立。既如此,由于 $x^*(\omega)$ 可积

$$\int_\Omega x^*(\omega)d\omega=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}N\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)$$

$$\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{N\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)}x(\omega)d\omega$$

$$=\int_\Omega x(\omega)\,d\omega.$$

这样就証明了(23.6)。 証毕

§25 平均遍历定理的証明

应用弱收斂的概念先来証明下面的定理,它包含定理 6.7 作为特殊情形。

定理 6.7′ (平均遍历定理❶) 設有从 Banach 空間 X 到其自身内的有界加法算子 T 滿足

$$\left\|n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}T^m\right\|\leqslant\gamma<\infty\quad(n=1,2,\cdots),\tag{25.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\|T^n\|=0.\tag{25.2}$$

这时如果对于某个 $x\in X$, 点列 $\{x_n\}$:

$$\left.\begin{array}{l}x_n=n^{-1}\sum\limits_{m=0}^{n-1}T^mx\ \text{含有弱收斂于}\\ x^*\in X\ \text{的子列}\ \{x_{n'}\},\end{array}\right\}\tag{25.3}$$

那么 $\{x_n\}$ 本身强收斂于 x^*, 且

$$Tx^*=x^*.\tag{25.4}$$

証明 首先, $x^*=Tx^*$, 卽 x^* 对于变换 T 的不变性可如下得知:由于

$$\|Tx_{n'}-x_{n'}\|=\|(n')^{-1}(T^{n'}x-x)\|\leqslant(n')^{-1}\|T^{n'}\|\cdot\|x\|+(n')^{-1}\|x\|$$

---

❶ F. Riesz: J. London Math. Soc., 13(1938), 274. K. Yosida: Proc. Imp. Acad. Tokyo, 14 (1938), 292. S. Kakutani: Proc. Imp. Acad. Tokyo, 14(1938), 295.

与(25.2)，$Tx_{n'}$ 也弱收斂于 x^*. 对于任意的 $f\in X^*$, $g(y)=f(Ty)$ 属于 X^*，因此再由 $x_{n'}\to x^*$ (弱)，$Tx_{n'}\to x^*$ (弱)，便得 $\lim_{n'\to\infty} f(Tx_{n'})=f(x^*)$, $\lim_{n'\to\infty} g(x_{n'})=g(x^*)$ ，从而

$$f(x^*)=g(x^*)=f(Tx^*) \text{ 卽 } f(x^*-Tx^*)=0,$$

于是由定理 5.1′ 的系 1 不能不有 $x^*-Tx^*=0$。

其次，置 $x=x^*+(x-x^*)$ 时，由于 $Tx^*=x^*$, 得

$$x_n=x^*+n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}T^m(x-x^*).$$

从而只需指出当 $n\to\infty$ 时右边第二項强收斂于 0 卽可。

設 I 表恒等算子，那么，对于属于

$$\mathfrak{W}(I-T)=\{w;\ w=(I-T)y,\ y\in X\}$$

的 w 有 $\lim_{n\to\infty} w_n=0$ (强)。这是因为此时 w_n 成为

$$w_n=n^{-1}(y-T^ny)\ ❶,$$

故和上面一样利用(25.2)卽可証明。其次，設 z 属于 $\mathfrak{W}(I-T)$ 的按范数的閉包，那么对于任意的 $\varepsilon>0$, z 可表为

$$z=w+u,\ w\in\mathfrak{W}(I-T),\ \|u\|\leqslant\varepsilon.$$

由上所述，关于 $z_n=w_n+u_n$ 中的 w_n 有 $\lim_{n\to\infty} w_n=0$(强)，又由(25.1)有 $\|u_n\|\leqslant\gamma\varepsilon$ $(n=1, 2, \cdots)$，故結果得 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|z_n\|\leqslant\gamma\varepsilon$. 由于 $\varepsilon>0$ 的任意性遂不能不有 $\lim_{n\to\infty} z_n=0$.

这样一来，为了証明定理只需指出 $(x-x^*)$ 是属于 $\mathfrak{W}(I-T)$ 的閉包这样一个閉子空間 X_0 卽可。假如 $(x-x^*)$ 不属于 X_0, 那么，由定理 5.1′ 系 2, 勢必存在 $f_0\in X^*$ 使

$$f_0(x-x^*)=1,\ \text{且当 } z\in X_0 \text{ 时 } f_0(z)=0.$$

但因 $(T^mx-T^{m+1}x)\in X_0$, 故 $f_0(T^mx)=f_0(T^{m+1}x)$, 从而

---

❶ 此地 $w=(I-T)y$, 故 $w_n=\frac{1}{n}(y-T^ny)$, 但原书作 $w_n=n^{-1}(w-T^nw)$, 有誤。——校者注

$$f_0\left(n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}T^m x\right)=f_0(x)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

因此，由(25.3)不能不 $f_0(x^*)=f_0(x_0)$。这和 $f_0(x-x^*)=1$ 矛盾。

証毕

定理 6.7 的証明　設 U 为如下的算子：对于每个 $x(\omega)\in L_2(\Omega)$，使 $x(\omega_1)=x(\omega_1(\omega))\in L_2(\Omega)$ 与之对应，即

$$(Ux)(\omega)=x(\omega_1(\omega)).$$

它是一个酉算子。这是由于变换 $\omega\to\omega_1$ 是保测的，故有

$$\int_\Omega |x(\omega_1(\omega))|^2 d\omega=\int_\Omega |x(\omega)|^2 d\omega$$

的緣故。因此再由定理 6.4 (i)，便知取 $T=U$，$\gamma=1$ 时前定理对于任意的 $x\in L_2(\Omega)$ 都可以应用，从而由 $(U^m x)(\omega)=x(\omega_m)$ 即得(23.8)。其次，

$$x_n(\omega)=n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}x(\omega_m(\omega))$$

既然强收斂，必然弱收斂。特别取 $y(w)\equiv 1$，得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,\ y)=(x^*,\ y).$$

但因 $\omega\to\omega_m(\omega)$ 为保測变换，必有

$$\int_\Omega x(\omega_m(\omega))d\omega=\int_\Omega x(\omega)d\omega.$$

所以上式左边成为 $\int_\Omega x(\omega)\,d\omega$，又因右边为 $\int_\Omega x^*(\omega)\,d\omega$，于是(23.6)也就得証。

定理 6.8 的証明　首先証(23.8′)。由定理 6.7′ 的証明，X 的任意元 x 可表为

$$x=x^*+(x-x^*),\ 于此\ Ux^*=x^*,\ (x-x^*)\in[\mathfrak{R}(I-U)\ 的閉包].\tag{25.5}$$

另一方面，視 $T=U^{-1}$，$\gamma=1$ 而应用定理 6.7′ 也可肯定

$$x^{**}(w)=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{m=0}^{-n+1}x(\omega_m(\omega))\ (\text{强})$$

的存在，而且也和上面一样知道对 x 可以如下分解

$$x=x^{**}+(x-x^{**}),$$

于此

$$U^{-1}x^{**}=x^{**},\ (x-x^{**})\in[\mathfrak{W}(I-U^{-1})\ \text{的閉包}].$$

但 $Uy=y$ 与 $U^{-1}y=y$ 是等价的。又因 U^{-1} 象 U 一样，也是将 X 一对一地映照到整个 X，故 $\mathfrak{W}(I-U)$ 实与

$$\mathfrak{W}((I-U)U^{-1})=\mathfrak{W}(U^{-1}-I)=\mathfrak{W}(I-U^{-1})$$

一致，因此，如能指出分解(25.5)的唯一性的話，則自必 $x^*=x^{**}$ 而(23.8′)就得到証明。

要指出分解(25.5)的唯一性只須指出，从 $Uy=y$ 及

$$y\in[\mathfrak{W}(I-U)\ \text{的閉包}]$$

可推出 $y=0$ 就可以了。但如在 6.7′ 的証明中所示，当

$$y\in[\mathfrak{W}(I-U)\ \text{的閉包}]$$

时 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}\sum\limits_{m=0}^{n-1}y(\omega_m)=0$ (强)。另一方面，由 $Uy=y$ 得 $U^my=y$，即 $y(\omega_m)=y(\omega)$，从而 $n^{-1}\sum\limits_{m=0}^{n-1}y(\omega_m)=y(\omega)$，于是不能不有 $y=0$。

最后証明(23.5′) 首先，如果 $\hat{x}(\omega)\in L_2(\Omega)$，那么由于 Ω 的全测度 $|\Omega|$ 是有限的，依 Schwarz 不等式

$$\int_\Omega|\hat{x}(\omega)|d\omega\leqslant\left(\int_\Omega 1\,d\omega\cdot\int_\Omega|\hat{x}(\omega)|^2d\omega\right)^{\frac{1}{2}}$$

便知 $\hat{x}(\omega)\in L_1(\Omega)$。从而对于 $\hat{x}(\omega)$ 个别遍历定理与平均遍历定理都可以应用。根据个别遍历定理的时間平均 $\hat{x}^*(\omega)$ 与根据平均遍历定理的时間平均是一致的。这是因为，和在 $L_2(\alpha,\beta)$ 的完备性証明中一样，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{x}_n(\omega)$ (强) 存在的話，一定可以选出适当的子列 $\{\hat{x}_{n'}(\omega)\}$ 殆遍收斂于 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{x}_n(\omega)$ (强)的緣故。实质上正是

由于上面这个事实，才将根据平均遍历定理的时間平均也写成 $\hat{x}^*(\omega)$ 的。

現在按 Lebesgue 积分的定义，对于每个 $x(\omega)\in L_1(\Omega)$ 与任意的 $\varepsilon>0$，可选 $\hat{x}(\omega)\in L_2(\Omega)\cap L_1(\Omega)$ 使

$$\int_\Omega |x(\omega)-\hat{x}(\omega)|d\omega<\varepsilon.$$

因此，由(24.2)关于 $(x(\omega)-\hat{x}(\omega))$ 的时間平均有

$$\int_\Omega |x^*(\omega)-\hat{x}^*(\omega)|d\omega\leqslant\int_\Omega |x(\omega)-\hat{x}(\omega)|d\omega<\varepsilon,$$

同样可得❶

$$\int_\Omega |x^{**}(\omega)-\hat{x}^{**}(\omega)|d\omega\leqslant\int_\Omega |x(\omega)-\hat{x}(\omega)|d\omega<\varepsilon.$$

但因如前所示 $\hat{x}^*=\hat{x}^{**}$，故

$$\int_\Omega |x^*(\omega)-x^{**}(\omega)|d\omega<2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，遂不能不有 $x^*=x^{**}$。

§26　遍历性与测度可迁性

設流 $\omega\to\omega_n$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 的流动域 Ω 的全測度 $|\Omega|$ 等于1。这时該流的**遍历性**(ergodicity)由

$$\text{时間平均}=\text{相空間平均} \tag{26.1}$$

来定义。也就是說，当对于任意的 $x(\omega)\in L_p(\Omega)$ $(p=1,\ 2)$，

$$x^*(\omega)=\int_\Omega x(\omega)d\omega\quad (\text{a.e.})❷ \tag{26.1'}$$

都被滿足时，便称上面的流为遍历的。因为由定理6.6及定理6.7，

$$\int_\Omega x^*(\omega)\,d\omega=\int_\Omega x(\omega)d\omega,$$

---

❶　这里 $x^{**}(\omega)$ 表示 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{m=0}^{-n+1} x(\omega_m)$，$\hat{x}^{**}$ 的意义仿此。——校者注

❷　对于殆通的 ω，“…”成立簡单地写成“…”(a.e.)，这里 a.e. 为 almost every-where 的縮写。

所以(26.1′)跟

$$\text{对于某常数 } C,\ x^*(\omega)=C \quad (\text{a. e.}) \qquad (26.1'')$$

也成为同一回事。

为了說明遍历性的直观的意义，設 $x(\omega)$ 及 $y(\omega)$ 分别为可測集 A, B 的特征函数:

$$x(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A,\\ 0 & \omega\overline{\in} A,\end{cases}\qquad y(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in B,\\ 0 & \omega\overline{\in} B.\end{cases}$$

那么，因为 $\{|x_n(\omega)|\}$ 有界($\leqslant 1$)且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\omega)=x^*(\omega)$ (a. e.)，所以若具有遍历性，便得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y)=(x^*, y)=\int_\Omega x(\omega)d\omega\cdot(1, y)$$
$$=\int_\Omega x(\omega)\,d\omega\cdot\int_\Omega y(\omega)\,d\omega=|A|\cdot|B|.$$

但
$$(x_n, y)=n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}\int_\Omega x(\omega_m(\omega))y(\omega)d\omega,$$

而由于 $\omega\to\omega_m(\omega)$ 是保測变换，

$$\int_\Omega x(\omega_m(\omega))\,y(\omega)d\omega=\int_{\omega_m(\omega)\in A,\,\omega\in B}d\omega$$
$$=|A_{-m}\cap B|=|A\cap B_m|.$$

因此"設 B 的点在 m 单位时間后移于 B_m，B_m 和 A 的公共部分的測度的时間平均必等于 $|A|$ 和 $|B|$ 的积"。即遍历性的直观意义不外乎是說，在时間平均的意义下，Ω 的各部分将一致地逐渐移到 Ω 的各部分。

遍历假設 为了求由相空間 Ω 各状态点 ω 而定的物理量 $x(\omega)$ 的相空間平均 $\int_\Omega x(\omega)d\omega$，如果遍历性条件被滿足的話，只需从任一初期状态 ω 出发，每隔单位时間測定一次求出 $x(\omega_m)$，然后再作时間平均 $x^*(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{m=0}^{n-1}x(\omega_m)$，它就可算作 $\int_\Omega x(\omega)d\omega$[1]。

---

[1] 因为这种初始状态 ω 的全体与 Ω 只相差一零測集，預先除去此零測集好了。

这不外乎就是奠定統計力学基础的，物理学者所要求的遍历假設(ergodic hypothesis)。

遍历的流之例 考慮圓环面(torus)Ω。即考慮实数对 $\{x, y\}$ 的全体 Ω，但是約定凡遇到 $x\equiv x'$, $y\equiv y'$ (mod 1)时，

$$\omega=\{x, y\} \text{ 与 } \omega'=\{x', y'\}$$

便当做是同一点。設实数 α, β 为**有理的綫性独立**，即設对于满足条件 $m^2+n^2>0$ 的整数对 m, n，恒 $m\alpha+n\beta\not\equiv 0$ (mod 1)。这时 Ω 到 Ω 的一对一点变换

$$\omega=\{x, y\}\to\omega_m=\{x+m\alpha, y+m\beta\} \quad (m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

对于 Ω 上的測度 $d\omega=dx\,dy$ 来說成为保測变換，而且流 $\omega\to\omega_m$ 是遍历的。

証明 我們知道对于任意的 $f(\omega)\in L_2(\Omega)$，其时間平均 $f^*(\omega)$是不变的，即 $f^*(\omega)=f^*(\omega_m(\omega))$ (a.e.)。因此，关于 $L_2(\Omega)$ 中的規范正交完全系

$$\{\exp(2\pi\sqrt{-1}(k_1x+k_2y))\}_{k_1, k_2=0, \pm1, \pm2, \cdots},$$

$f^*(\omega)$ 与 $f^*(\omega_m(\omega))$ 的 Fourier 系数不得不一致，也因此根据 $dx\,dy$ 的不变性，由 $\omega_m=\{x+m\alpha, y+m\beta\}$ 得

$$\int_0^1\int_0^1 f^*(\omega)\exp(-2\pi\sqrt{-1}(k_1x+k_2y))\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f^*(\omega_m(\omega))\exp(-2\pi\sqrt{-1}(k_1x+k_2y))\,dx\,dy$$
$$=\exp(2\pi\sqrt{-1}(k_1\alpha+k_2\beta)m)$$
$$\times\int_0^1\int_0^1 f^*(\omega)\exp(-2\pi\sqrt{-1}(k_1x+k_2y))\,dx\,dy.$$

从而对于 $f^*(\omega)$的不为 0 的系数(对于 $\{k_1, k_2\}$ 的系数)，

$$\exp(2\pi\sqrt{-1}(k_1\alpha+k_2\beta)m)=1 \quad (m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

不得不成立。由于 α, β 是有理的綫性独立，从上式得 $k_1=0$, $k_2=0$。于是 $f^*(\omega)$的形式的 Fourier 級数仅由常数項組成。再

由 Parseval 等式 (11.6) 与 (11.5) 便得 $f^*(\omega)=$常数 (a.e.)，因此，对于 $f\in L_2(\Omega)$ 我們已証明了 (26.1″) 成立。对于任意的 $f\in L_1(\Omega)$，由 Lebesgue 积分的定义知道存在着在 $L_1(\Omega)$ 范数意义下和 f 可以接近到任何程度的 $g\in L_2(\Omega)\cap L_1(\Omega)$，即对于任意的 $\varepsilon>0$，$\int_\Omega|g(\omega)-f(\omega)|d\omega<\varepsilon$。从而由 (24.2)，

$$\int_\Omega|g^*(\omega)-f^*(\omega)|\,d\omega\leqslant\int_\Omega|g(\omega)-f(\omega)|\,d\omega<\varepsilon.$$

但因如上所示 $g^*(\omega)=$常数 (a.e.)，故不得不 $f^*(\omega)=$常数 (a.e.)。这样就説明了上述的流 $\omega\to\omega_m$ 的遍历性。　証毕

测度可迁性　流 $\omega\to\omega_m(\omega)$ 叫做**测度可迁的** (metric transitive) 是指

$$\left.\begin{array}{l}\text{从可测集 } A\subseteq\Omega \text{ 的特征函数 } x_A(\omega) \text{ 的不变性，即}\\ \quad x_A(\omega_1(\omega))=x_A(\omega)\ \ (\text{a. e.}) \text{ 可推出}\\ \qquad\qquad |A|=1 \text{ 或 } |A|=0.\end{array}\right\}\qquad(26.2)$$

也就是説，如果不考虑 0 测度的集合的話，就整体来説不随該流而变的 Ω 的子集只有 Ω 自身，这时便称該流在 Ω 是测度可迁的。这个条件也等于説該流不可能分割成两个各别的流——**不可分割性** (irreducibility)。事实上，如果 A 对于該流不变，則 $\Omega-A$ 对于該流也将不变，于是 A 中的流与 $\Omega-A$ 中的流便可看做是两个无关的流了。

由 G. D. Birkhoff 与 P. A. Smith 有❶

定理 6.9　流 $\omega\to\omega_m(\omega)$ 的遍历性与测度可迁性是等价的。

証明　(26.1″) → (26.2)。由 $x_A(\omega_1(\omega))=x_A(\omega)$ (a.e.) 有 $x_A(\omega_m(\omega))=x_A(\omega)$ (a.e.)，而 $x_A^*(\omega)=x_A(\omega)$。从而由 $x_A^*(\omega)=$常数 (a.e.) 得 $x_A(\omega)=$常数，于是不能不 $|A|=|\Omega|=1$ 或

❶ Structure analysis of surface transformation, J. Math. pures et appliq. 7 (1928), 345.

$|A|=0$.

$(26.2)\to(26.1'')$。設 $x(\omega)$ 为实函数 $\in L_1(\Omega)$ 或 $L_2(\Omega)$,而不是 $x^*(\omega)=$常数 (a. e.),那么必可取适当的常数 α 使两个点集

$$A=\{\omega;\ x^*(\omega)>\alpha\},\quad \Omega-A=\{\omega;\ x^*(\omega)\leqslant\alpha\}$$

的测度同时 >0. 从而 $0<|A|<1$. 但因 $x^*(\omega_1(\omega))=x^*(\omega)$ (a. e.),必有 $x_A^*(\omega_1(\omega))=x_A^*(\omega)$ (a. e.). 因此由 (26.2) 将得 $|A|=1$ 或 $|A|=0$——不合理。所以当(26.2)成立时,如上的 $x(\omega)$ 決不存在,即(26.1'')成立。

§27 有不变测度的 Марков 过程

作为不可压縮穩定流的概念的推广有如本节所标示的随机过程。首先叙述

Марков 过程的定义 設 Ω 的点遵循某概率法則在 Ω 内运动,并設最初位于 ω 的点随着該运动在单位时間后来到可测集 A 的概率为 $P(\omega, A)$. 这时如果該概率法則满足下面的条件:

$$\left.\begin{array}{l}P(\omega, A)\text{和动点来到 }\omega\text{ 之前在何处无关,}\\ \text{也就是說和它过去的历史无关,}\end{array}\right\}\qquad(27.1)$$

$$P(\omega, A)\text{和时間的原点怎样取法无关,}\qquad(27.2)$$

我們便說在 Ω 中給定了一个(单純的) Марков 过程。

我們再假定

$$\left.\begin{array}{l}P(\omega, A)\text{当固定 }\omega\text{ 时成为关于可测集 }A\text{ 的一种}\\ \text{测度❶,且当而定 }A\text{ 时 }P(\omega, A)\text{ 为 }\omega\text{ 的可测函数。}\end{array}\right\}\qquad(27.3)$$

由定义显然

$$P(\omega, A)\geqslant 0 \text{ 且 } P(\omega, \Omega)=1,\qquad(27.4)$$

又从上面可知,最初位于 ω 的点在 n 单位时間后来到 A 内的概率

❶ 当 $A_n(n=1, 2, \cdots)$ 互无公共点时,$P\left(\omega, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega, A_n)$.

$P^{(n)}(\omega, A)$ 为

$$\left.\begin{array}{l}P^{(n)}(\omega, A)=\int_{\Omega} P^{(n-1)}(\omega, d\xi) P(\xi, A) \\ (\text{但 } P^{(0)}(\omega, A)=P(\omega, A)),\end{array}\right\} \tag{27.5}$$

而

$$P^{(n)}(\omega, A) \geqslant 0 \text{ 且 } P^{(n)}(\omega, \Omega)=1. \tag{27.4'}$$

有不变測度的 Марков 过程 如果 Марков 过程 $P(\omega, A)$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于一切的可測集 } A, \\ \int_{\Omega} d\omega P(\omega, A)=|A|=\int_{A} d\omega\end{array}\right\} \tag{27.6}$$

成立的話,就称 $P(\omega, A)$ **不改变测度 $d\omega$**。这时 $P^{(n)}(\omega, A)$ 同样以 $d\omega$ 为不变測度。

例 1 在不可压縮稳定流 $\omega \to \omega_m(\omega)$ 的情形,如令 $P(\omega, A)=x_A(\omega_1(\omega))$,它就成为不变 $d\omega$ 的 Марков 过程。

例 2 可表示成 $P(\omega, A)=\int_A p(\omega, \xi)\, d\xi$ 的 Марков 过程,若 $p(\omega, \xi)=p(\xi, \omega)$ 为两个变数 ω, ξ 的可測函数,則以 $d\omega$ 为不变測度。

对于有不变測度 $d\omega$ 的 Марков 过程 $P(\omega, A)$,成立着下面两个和定理 6.6 及 6.7 相当的定理。

定理 6.6″ 若 $x \in L_1(\Omega)$,则

$$x^{(m)}(\omega)=\int_{\Omega} P^{(m)}(\omega, d\xi) x(\xi) \in L_1(\Omega) \quad (m=0, 1, 2, \cdots),$$

且

$$\text{时間平均 } x^*(\omega)=\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} x^{(m)}(\omega) \quad (\text{a. e.})$$

存在而且 $\in L_1(\Omega)$,此外

$$x^{(1)*}(\omega)=x^*(\omega) \quad (\text{a. e.}),$$

$$\int_{\Omega} x^*(\omega)\, d\omega=\int_{\Omega} x(\omega)\, d\omega.$$

定理 6.7″ 若 $x \in L_2(\Omega)$,則

$$x^{(m)}(\omega)=\int_\Omega P^{(m)}(\omega,\ d\xi)x(\xi)\in L_2(\Omega)\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

且按 $L_2(\Omega)$ 的范数 $\|\ \ \|_2$ 存在着

$$\text{时間平均 } x^*=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}x^{(m)}\ (\text{强}),$$

此外

$$x^{(1)*}(\omega)=x^*(\omega)\ \ (\text{a.e.}),\ \ \int_\Omega x^*(\omega)\,d\omega=\int_\Omega x(\omega)\,d\omega.$$

定理 6.7″ 的証明 为此只需指出,凭

$$x\to x^{(1)}=Tx,\ \ x^{(1)}(\omega)=\int_\Omega P(\omega,\ d\xi)x(\xi)$$

定义了一个从 $L_2(\Omega)$ 到 $L_2(\Omega)$ 内的加法算子 T, 且 $\|T\|_2\leqslant 1$. 因为这样一来由 (27.5) 将有 $x^{(m)}=T^m x$, 而且 $\|T^m\|_2\leqslant 1\,(m=1,2,\cdots)$, 于是可以应用定理 6.7′ 了。

設 $x(\omega)\in L_2(\Omega)$, 那么由于 $P(\omega,\ d\xi)\geqslant 0$,

$$\left|\int_\Omega P(\omega,\ d\xi)x(\xi)\right|\leqslant\int_\Omega P(\omega,\ d\xi)\,|x(\xi)|,$$

因此,又只需指出当 $x(\omega)$ 恒 $\geqslant 0$ 时 $x^{(1)}=Tx$ 有意义,且

$$\|x^{(1)}\|_2\leqslant\|x\|_2$$

即可。以下設 $x(\omega)\in L_2(\Omega)$ 恒 $\geqslant 0$, 并令

$${}_kx(\omega)=\min\,(x(\omega),\ k),$$

那么由于 (27.4), $({}_kx(\omega))^{(1)}$ 确有意义且

$$0\leqslant({}_kx(\omega))^{(1)}\leqslant({}_{k+1}x(\omega))^{(1)}.$$

并且由 Schwarz 不等式,

$$\left|\int_\Omega P(\omega,\ d\xi)\,{}_kx(\xi)\right|^2\leqslant\int_\Omega P(\omega,\ d\xi)\cdot\int_\Omega P(\omega,\ d\xi)\,|{}_kx(\xi)|^2$$

$$=\int_\Omega P(\omega,\ d\xi)\,|{}_kx(\xi)|^2.$$

从而利用 $d\omega$ 为不变測度得到

$$\|({}_k x)^{(1)}\|_2^2 \leqslant \int_\Omega d\omega \left\{\int_\Omega P(\omega, d\xi)\,|{}_k x(\xi)|^2\right\} = \|{}_k x\|_2^2 \leqslant \|x\|_2^2.$$

因此，如果令 $\bar{x}(\omega) = \varliminf_{k\to\infty} ({}_k x(\omega))^{(1)}$，則由 Lebesgue-Fatou 定理，

$$\|\bar{x}\|_2^2 = \int_\Omega \varliminf_{k\to\infty} |({}_k x(\omega))^{(1)}|^2 d\omega \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|({}_k x)^{(1)}\|_2^2 \leqslant \|x\|_2^2,$$

即 $\bar{x} \in L_2(\Omega)$。再用 Lebesgue-Fatou 定理，

$$\bar{x}(\omega) = \varliminf_{k\to\infty} \int_\Omega P(\omega, d\xi)\,({}_k x(\xi))$$

$$\geqslant \int_\Omega P(\omega, d\xi)\,\{\varliminf_{k\to\infty} ({}_k x(\xi))\} = \int_\Omega P(\omega, d\xi)\,x(\xi).$$

但因如上所示 $\bar{x} \in L_2(\Omega)$，故对于殆遍的 ω_0，$\bar{x}(\omega_0) \neq \infty$，从而对于这样的 ω_0，$x(\xi)$ 按測度 $P(\omega_0, d\xi)$ 必可积分，于是第三次用 Lebesgue-Fatou 定理❶

$$\int_\Omega P(\omega_0, d\xi)\,\{\varliminf_{k\to\infty} ({}_k x(\xi))\} = \varliminf_{k\to\infty} \int_\Omega P(\omega_0, d\xi)\,({}_k x(\xi))$$

$$= \bar{x}(\omega_0).$$

由于此式左边为 $x^{(1)}(\omega_0)$，再根据上面所説遂得 $x^{(1)} \in L_2(\Omega)$ 及 $\|x^{(1)}\|_2 = \|\bar{x}\|_2 \leqslant \|x\|_2$。

定理 6.6″ 的証明从略，讀者可参考 N. Dunford 与 J. Schwartz 的論文❷。

注 由以上两定理还可以証明：对于有不变測度 $d\omega$ 的 Марков 过程，当仍以

$$\text{时間平均 } x^*(\omega) = \text{相空間平均} \int_\Omega x(\omega)\,d\omega \qquad (26\cdot 1)$$

作为遍历性的定义时，那末遍历性和測度可迁性等价。下面就是所謂測度可迁性：

---

❶ 这次也就是应用在 Lebesgue 的积分号下求极限定理。——譯者注

❷ Journal of Rational Mechanics and Analysis, 5 (1956), 129～178.

$$\left.\begin{array}{l}\text{不可能对 } \Omega \text{ 施行分割使得 } \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2,\ \Omega_1\cap\Omega_2=\text{空集},\\ \qquad\qquad \int_{\Omega_1}d\omega>0,\quad \int_{\Omega_2}d\omega>0,\\ \text{且若 } \omega_i\in\Omega_i,\ \Delta_j\subseteqq\Omega_j\ (i\neq j)\text{,則恒有 } P(\omega_i,\Delta_j)=0.\end{array}\right\}\qquad(26.2')$$

再者,关于遍历理論可参考 Hopf ❶, K. Yosida(吉田耕作) ❷, S. Kakutani(角谷靜夫) ❸, P. Halmos ❹ 等人的著作。

❶ Ergodentheorie, Berlin (1937).

❷ エルゴード諸定理,中文館 (1950).

❸ Ergodic Theory, Internat. Congress of Math., 1950, vol. 2, 128 頁。

❹ Lectures on Ergodic Theory, Publicat. Math. Soc. Japan, 3 (1956).

第 7 章 Weyl-Schwartz 定理的証明

設 R 为 E^m 的有界开集。設 L 是椭圓型偏微分算子，以 $C^\infty(R)$ 中的函数为系数。又給定了 $H_0(R)$ 中的函数 $f(x)$，設 $u_0(x) \in H_0(R)$ 为 $Lu=f$ 的一个弱解。这样的 $u_0(x)$ 在方程右边的 $f(x)$ 属于 C^∞ 的范圍之內都可以看做是属于 C^∞ 的。这个在第 4 章曾引用的 Weyl-Schwartz 定理，乃是关于椭圓型偏微分方程的基本定理，这定理可以由下述两定理 (Friedrichs-Lax-Nirenberg 定理与 Соболев 引理) 的結合而得。

§ 28 Friedrichs-Lax-Nirenberg 定理与 Соболев 引理

定理 7.1 (Friedrich[1]-Lax[2]-Nirenberg[3]) 設:

$$L=\sum_{|\rho|=|\sigma|=0}^{n} D^{(\rho)} a^{\rho;\sigma}(x) D^{(\sigma)}$$

是以 $C^\infty(R)$ 中的函数 $a^{\rho;\sigma}(x)$ 为系数的 $2n$ 阶椭圓型偏微分算子，$f(x) \in H_0(R)=L_2(R)$，$u_0(x) \in H_0(R)=L_2(R)$，且 u_0 为

$$Lu=f \tag{28.1}$$

的一个弱解。这时如果 $f \in \widetilde{H}_p(R)$[4]，那么，对于任意的开集 R_1，当它的閉包 R_1^a 含于 R 的內部时，有 $u_0 \in \widetilde{H}_{2n+p}(R_1)$[4]。

---

[1] On the differentiability of solutions of linear elliptic equations, Comm. on Pure and Applied Math., 6 (1953), 299～325.

[2] On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, 同上 8 (1955), 615～633.

[3] Remarks on strongly elliptic partial differential equations, 同上 8 (1955), 648～674.

[4] 这里的 $\widetilde{H}_p(R)$ 原书誤为 $H_p(R)$，这里的 $\widetilde{H}_{2n+p}(R_1)$ 原书誤为 $H_{2n+p}(R_1)$。——譯者注

定理7.2 (Соболев)❶ 設 R 的維数为 m。如果 $k>\frac{m}{2}+\sigma$，則对于 $H_k(R_1)$❷中的函数 u_0，必存在 $C^\sigma(R_1)$中的函数 u_0'，使得在 R_1 中殆遍地成立着 $u_0(x)=u_0'(x)$。

在本书里我們将先証定理7.2，然后証定理7.1。

§29 Соболев 引理7.2的証明

如果定义 $\tilde{v}_0(x)$ 为

$$\tilde{v}_0(x)=\begin{cases} u_0(x) & \text{当 } x\in R_1, \\ 0 & \text{当 } x\in E^m-R_1, \end{cases}$$

那么由假定，$\tilde{v}_0\in H_k(E^m)$。从而有 $\mathfrak{D}^\infty(E^m)$中的函数列 $\{u_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|\tilde{v}_0-u_n\|_k=0.$$

因此，当 $|p|=\sum_{j=1}^{m}p_j\leqslant k$ 时，对于

$$D^{(p)}=\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_m}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_m^{p_m}},$$

有确定的 $\widetilde{D}^{(p)}\tilde{v}_0(x)\in H_0(E^m)=L_0(E^m)$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\|D^{(p)}u_n-\widetilde{D}^{(p)}\tilde{v}_0\|_0=0.$$

由于 Fourier 变换 $\mathfrak{F}$ 为酉算子，

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathfrak{F}D^{(p)}u_n-\mathfrak{F}\widetilde{D}^{(p)}\tilde{v}_0\|_0=0.$$

且由(17.7)，

---

❶ Об одной теореме функционального анализа, Мат. Сборник, 4 (1938), 471～497.

❷ 为了利用这引理来証明 Weyl-Schwartz 定理还須将 $H_k(R_1)$推广为 $\tilde{H}_k(R_1)$，这是可能的。事实上，設 $u_0\in\tilde{H}_k(R_1)$，任取适合 $R_1^a\subsetneqq R_2$，$R_2^a\subseteqq R$ 的任意开集 R_2，这时总可作一 $\bar{u}_0\in H_k(R_2)$ 使 $u_0(x)=\bar{u}_0(x)$，当 $x\in R_1$。例如，$\bar{u}_0(x)=v(x)u_0(x)$ 便是这样的，于此 $v(x)$为任一属于 $\mathfrak{D}^\infty(R_2)$ 的函数，它在 R_1 的值$=1$（利用§31的方法容易作出这种 v）。应用(7.2)于 $\bar{u}_0(x)$ 便知 $u_0(x)$ 在 R_1 内殆遍等于 C^σ 的一个函数。——譯者注

$$\mathfrak{F}D^{(p)}u_n(z)=U_n(z)\cdot z_1^{p_1}z_2^{p_2}\cdots z_m^{p_m}(2\pi\sqrt{-1})^{|p|},\ U_n=\mathfrak{F}u_n.$$

同样由于 $\mathfrak{F}$ 为酉算子，

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n-\widetilde{U}_0\|_0=0,\ \widetilde{U}_0=\mathfrak{F}\tilde{u}_0.$$

于是和 $L_2(\alpha,\beta)$ 的完备性的証明（§ 4 例 2）一样，可选取适当的自然数列 $\{n'\}$ 使得在殆遍的 $z\in E^m$,

$$\lim_{n'\to\infty}U_{n'}(z)z_1^{p_1}\cdots z_m^{p_m}(2\pi\sqrt{-1})^{|p|}=\widetilde{U}^{(p)}(z),\ \widetilde{U}^{(p)}=\mathfrak{F}\widetilde{D}^{(p)}\tilde{u}_0,$$

$$\lim_{n'\to\infty}U_{n'}(z)=\widetilde{U}_0(z).$$

因此，

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } |p|\leqslant k, \text{ 則在殆遍的 } z\in E^m,\\ \widetilde{U}_0(z)z_1^{p_1}\cdots z_m^{p_m}(2\pi\sqrt{-1})^{|p|}=\widetilde{U}^{(p)}(z),\\ \text{但 } \widetilde{U}_0=\mathfrak{F}\tilde{u}_0,\ \widetilde{U}^{(p)}=\mathfrak{F}\widetilde{D}^{(p)}\tilde{u}_0.\end{array}\right\}\tag{29.1}$$

今 $\widetilde{U}_0(z)$ 及 $\widetilde{U}^{(p)}(z)$ 作为属于 $H_0(E^m)$ 的函数的 Fourier 变换必然也属于 $H_0(E^m)$. 故特别是

$$\text{若 } |p|<k, \text{ 則 } \widetilde{U}_0(z)z_1^{p_1}\cdots z_m^{p_m}\in H_0(E^m).\tag{29.2}$$

由此便可知

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } \sigma=|q|=\sum_{j=1}^m q_j \text{ 满足 } k>\dfrac{m}{2}+\sigma,\\ \text{則 } \widetilde{U}_0(z)z_1^{q_1}\cdots z_m^{q_m} \text{ 在 } E^m \text{ 可积。}\end{array}\right\}\tag{29.3}$$

其証明如下 首先对于任意的 $\alpha>0$, 不管 q 如何，由 Schwarz 不等式得

$$\int_{|z|\leqslant\alpha}|\widetilde{U}_0(z)z_1^{q_1}\cdots z_m^{q_m}|dz$$
$$\leqslant\left(\int_{|z|<\alpha}|z_1^{q_1}\cdots z_m^{q_m}|^2dz\int_{|z|<\alpha}|\widetilde{U}_0(z)|^2dz\right)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

同样有

$$\int_{|z|>\alpha}|\widetilde{U}_0(z)z_1^{q_1}\cdots z_m^{q_m}|dz\leqslant\left(\int_{|z|>\alpha}\left(\frac{|z_1^{q_1}\cdots z_m^{q_m}|}{\left(1+\sum_{j=1}^m z_j^2\right)^{\frac{k}{2}}}\right)^2dz\right.$$

$$\times\int_{|z|>\alpha}\left|\widetilde{U}_0(z)\left(1+\sum_{j=1}^{m}z_j^2\right)^{\frac{k}{2}}\right|^2 dz\Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

由于(29.2)右边的第二因子 $<\infty$，又通过极坐标并注意关系

$$dz=dz_1dz_2\cdots dz_m=r^{m-1}dr\cdot d\Omega_{m-1}\text{❶},\tag{29.4}$$

易知右边的第一因子当 q 满足

$$2|q|-2k+m-1<-1 \quad 即 \quad k>\frac{m}{2}+|q|$$

时是收斂的，这样就証明了(29.3)。

現在由(17.4)，$\tilde{u}_0=\mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}\tilde{u}_0)=\mathfrak{F}^*\widetilde{U}_0$，即

$$\tilde{u}_0(x)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{|z|<n}\widetilde{U}_0(z)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,z\cdot x\right)dz.$$

从而和在 $L_2(\alpha,\beta)$ 的完备性的証明(§4 例2)中一样，可选取适当的自然数的子列 $\{n'\}$ 使

$$\left.\begin{array}{l}在殆遍的\ x\in E^m\\ \tilde{u}_0(x)=\lim\limits_{n'\to\infty}\displaystyle\int_{|z|<n'}\widetilde{U}_0(z)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,z\cdot x\right)dz.\end{array}\right\}$$

但因根据(29.3)，$\widetilde{U}_0(z)$ 在 E^m 可积，故上式右边等于

$$\int_{E^m}\widetilde{U}_0(z)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,z\cdot x\right)dz.\tag{29.5}$$

也就是說，对殆遍的 $x\in E^m$，$\tilde{u}_0(x)$ 等于(29.5)。可是当 $|q|<k-\frac{m}{2}$ 时，(29.5)的被积函数經施行 $D_x^{(q)}$ 后所得的

$$D_x^{(q)}\widetilde{U}_0(z)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,z\cdot x\right),$$

其絕对值 $\leqslant|\widetilde{U}_0(z)|\cdot(2\pi)^{|q|}|z_1^{q_1}\cdots z_m^{q_m}|$，此式右边和 x 无关，且由于(29.3)，它在 E^m 可积，因此

$$D_x^{(q)}\int_{E^m}\widetilde{U}_0(z)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,z\cdot x\right)dz$$
$$=\int_{E^m}\widetilde{U}_0(z)\,D_x^{(q)}\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,z\cdot x\right)dz.$$

❶ Ω_{m-1} 为以原点为中心、1为半徑的球面的超面积。

并且右边为 x 的連續函数，由 (29.3) 也可立刻明白，这是因为可积函数的 Fourier 变换总是連續函数的緣故。

这样，当 $|q|<k-\frac{m}{2}$ 时，(29.5) 关于 x 为 $|q|$ 次連續可微且 $\tilde{v}_0(x)$ 殆遍等于 (29.5)，这两点都得到証明。

注　Соболев 原証如何，著者虽然不悉，但在前面提到的 Friedrich 的論文中曾給出一証。同样的証明在南雲道夫❶的书中也可见到。著者为了編写本讲座的必要，虽然也曾参考上述証明，但最近从 J. L. Lions 的学位論文❷中得知 Соболев 引理的証明以利用 Fourier 变换为最簡单。总之，当我們看到 Соболев 引理不过是 Fourier 积分論的一个习题以后，可以认为 Weyl-Schwartz 定理的难点在于 Friedrichs-Lax-Nirenberg 定理。

§ 30 Friedrichs-Lax-Nirenberg 定理的証明

为了説明的方便，姑引入下面的定义。

函数的位数　設 $u(x)$ 是一个在 R 上定义的函数，如果对于任意有界开集 R_1，当 R_1 的閉包 R_1^a 含于 R 內部时，都成立着 $u(x)\in\widetilde{H}_k(R_1)$，就称 $u(x)$ 在 R 的"位数"为 k。这时 $u(x)$ 的所有阶数不超过 k 的广义偏导函数 $\widetilde{D}^{(s)}u\,(|s|\leqslant k)$ 全部属于 $H_0(R_1)$。

現在 F-L-N 定理可由下面三个引理（其証明将于次节以下給出）导出。

引理 1　(i) 若 $u_0(x)$ 在 R 的位数为 i，且对于 $|s|\leqslant i$ 的所有 $D^{(s)}$，$\widetilde{D}^{(s)}u_0$ 在 $\dot{R}$ 的位数为 j，則 $u_0(x)$ 在 R 的位数为 $(i+j)$。(ii) 若 $u_0(x)$ 在 R 的位数为 $(i+j)$，則 $\widetilde{D}^{(s)}u_0\,(|s|\leqslant i)$ 在 R 的位数为 j。

引理 2　設 R_1 为有界开集，且 R_1 的閉包 R_1^a 含于 R 內部。对于任意的 $u_0\in L_2(R_1)=H_0(R_1)$ 与任意的正数 s，

❶ 近代的偏微分方程式論，现代数学讲座（共立社）**4-B** (1957)，58。

❷ Problèmes aux limites en théorie des distributions, Acta. Math., **94** (1955), 13～153.

$$(I+(-\Delta)^s)h=u_0 \quad (\Delta=\text{Laplace 算子}) \tag{30.1}$$

必具有在 R_1 上位数为 $2s$ 的弱解 h。

引理 3　設 $u_0\in L_2(R)=H_0(R)$ 在 R 的位数为 n。这时如果

$$|(L^*\varphi,u_0)_0|\leqslant \text{const}\cdot\|\varphi\|_{n-1} \quad (\text{对于一切 } \varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R_1)) \tag{30.2}$$

成立，則 u_0 在 R 的位数为 $(n+1)$。

定理 7.1 (F-L-N 定理)的証明[1]　分 3 段进行。

第 1 段　設 $u_0\in L_2(R_1)$ 在 R_1 的位数为 n，且如果

$$|(L^*\varphi,u_0)_0|\leqslant \text{const}\cdot\|\varphi\|_{n-j} \quad (\text{对于一切 } \varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R_1)) \tag{30.2'}$$

成立，則 u_0 在 R_1 的位数为 $(n+j)$。

对 j 用归納法証明。根据引理 3，$j=1$ 时是成立的，当我們假定对 $j-1$ (但 $j>1$) 上述結論成立，从而 u_0 在 R_1 的位数为 $(n+j-1)$[2](其实这里已用到(30.2')——譯者)，然后由(30.2')来証明 u_0 在 R_1 的位数为 $n+j$。設 D 为 1 阶偏微分算子$\left(D=\frac{\partial}{\partial x_1}\text{ 或 }\frac{\partial}{\partial x_2}\text{ 或}\cdots\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$，那么由(30.2')，

$$|(L^*D\varphi,\ u_0)_0|\leqslant \text{const}\cdot\|D\varphi\|_{n-j}\leqslant \text{const}\cdot\|\varphi\|_{n-j+1}. \tag{30.3}$$

但[3]

$$\begin{aligned}(L^*D\varphi,\ u_0)_0&=(-1)^{|\rho|+|\sigma|}(D^{(\sigma)}a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}D\varphi,\ u_0)_0\\&=(-1)^{|\rho|+|\sigma|}(D^{(\sigma)}a^{\rho;\sigma}DD^{(\rho)}\varphi,\ u_0)_0\\&=(-1)^{|\rho|+|\sigma|}(D^{(\sigma)}Da^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,\ u_0)\\&\quad-(-1)^{|\rho|+|\sigma|}(D^{(\sigma)}(Da^{\rho;\sigma})\cdot D^{(\rho)}\varphi,\ u_0)_0.\end{aligned}$$

由于 u_0 在 R_1 的位数为 $(n+j-1)$，上式右边各項中直到 $(n+j-1)$ 阶的偏微分利用分部积分可以移到 u_0 的一边，因此

---

[1] 这个說明依照前述 Nirenberg 的論文，但在 Nirenberg 的論文中，由于引理 2 里 h_0 的位数为 s，以致需要較复杂的第 4 段。

[2] 因为当 u_0 对 j 适合 (30.2') 时，显然 u_0 对 $j-1$ 也适合 (30.2')，这也就是 (30.3)。——校者注

[3] 在不怕引起誤解时，$\sum_{|\rho|,|\sigma|=0}^{m}$ 从略。

$$
\begin{aligned}
(L^{*}D\varphi,\ u_0)_0
&= \sum_{\substack{|\sigma|+|\rho'|\leq n+j-2\\ |\sigma|\leq n}} (-1)^{|\rho|+1+|\rho'|}\left(D^{(\rho-\rho')}\varphi,\ D^{(\rho')}a^{\rho;\sigma}\widetilde{D}\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0\right)_0 \\
&\quad+ \sum_{\substack{|\sigma|+|\rho'|\leq n+j-1\\ |\sigma|\leq n}} (-1)^{|\rho|+1+|\rho'|}\left(D^{(\rho-\rho')}\varphi,\ D^{(\rho')}(Da^{\rho;\sigma})\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0\right)_0.
\end{aligned}
$$

由于 $\widetilde{D}\widetilde{D}^{(\sigma)}=\widetilde{D}^{(\sigma)}\widetilde{D}$，右边第一項等于 $-(L^{*}\varphi,\ \widetilde{D}u_0)_0$。又由 Leibniz 关于乘积的微分公式可知右边第二項的形状为

$$
\sum_{\substack{|\rho|\leq 2n-(n+j-1)\\ |\sigma'|\leq n+j-1}} \left(D^{(\rho)}\varphi,\ b^{\rho;\sigma'}\widetilde{D}^{(\sigma')}u_0\right)_0,
$$

在此 $b^{\rho;\sigma}$ 乃是在 R_1 上有界的函数。因此，在下式右边第一項用 (30.3)，第二項用 Schwarz 不等式得

$$
\begin{aligned}
|(L^{*}\varphi,\ \widetilde{D}u_0)_0| &\leqslant |(L^{*}D\varphi,\ u_0)_0| \\
&\quad+ \left|\sum_{\substack{|\rho|\leq 2n-(n+j-1)\\ |\sigma'|\leq n+j-1}} \left(D^{(\rho)}\varphi,\ b^{\rho;\sigma'}\widetilde{D}^{(\sigma')}u_0\right)_0\right| \\
&\leqslant \text{const}\cdot\|\varphi\|_{n-j+1}+\text{const}\cdot\|\varphi\|_{2n-(n+j-1)} \\
&\leqslant \text{const}\cdot\|\varphi\|_{n-(j-1)}.
\end{aligned}
$$

因 $j>1$，由引理 1，$\widetilde{D}u_0$ 在 R_1 的位数 $\geqslant n+j-1-1=n+j-2\geqslant n$。从而利用归納法的假定知 $\widetilde{D}u_0$ 在 R_1 的位数为 $n+j-1$。因此再由引理 1 知 u_0 在 R_1 的位数为 $n+j$。

第 2 段 现在特别假定 v_0 在 R 的位数为 n 时来証明定理 7.1[1]。証明是按照关于 p 的归納法。首先在 $p=0$ 的情形，应用 Schwarz 不等式于 $(L^{*}\varphi, u_0)_0$ 得

$$
|(L^{*}\varphi,\ u_0)_0| \leqslant \text{const}\cdot\|\varphi\|_0=\text{const}\cdot\|\varphi\|_{n-n}.
$$

从而由第一段 u_0 在 R_1 的位数为 $n+n=2n$。因此 $p=0$ 的情形得証。試再观察 $p=1$ 的情况。因为这时 u_0 在 R_1 的位数为 $2n$，故按照和在第一段內相同的計算(部分积分)对于 1 阶偏微分算子 D

$$
\begin{aligned}
(L^{*}\varphi,\widetilde{D}u_0)_0 &= (-1)(DL^{*}\varphi,u_0)_0 \\
&= (-1)^{|\rho|+|\sigma|+1}(D^{(\sigma)}Da^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\varphi,u_0)_0
\end{aligned}
$$

[1] 这是 Friedrichs 的定理。Lax 与 Nirenberg 将它改进成为定理 7.1 的形式。

$$= (-1)^{|\rho|+|\sigma|+1}(D^{(\sigma)}a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}D\varphi, u_0)_0$$
$$+ (-1)^{|\rho|+|\sigma|+1}(D^{(\sigma)}(Da^{\rho;\sigma})D^{(\rho)}\varphi, u_0)_0$$
$$= (-1)(L^*D\varphi, u_0)_0 + (-1)(\varphi, \widetilde{D}^{(\rho)}(Da^{\rho;\sigma})\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)_0.$$

右边第一項通过分部积分成为

$$= (-1)(D\varphi, f)_0 = (\varphi, \widetilde{D}f)_0,$$

这里利用了 f 在 R_1 的位数为 1 的假設，于是由 Schwarz 不等式，

$$|(L^*\varphi, \widetilde{D}u_0)_0| \leqslant \text{const}\cdot\|\varphi\|_0 = \text{const}\cdot\|\varphi\|_{n-n}.$$

但因 u_0 在 R_1 的位数为 $2n$，故由引理 1，$\widetilde{D}u_0$ 在 R_1 的位数为 $2n-1\geqslant n$。从而由第一段 $\widetilde{D}u_0$ 在 R_1 的位数为 $n+n=2n$。因此再由引理 1，u_0在 R_1 的位数 $=2n+1$。至于 $p=2$, $p=3$, …的情形只需依次凭同样的方法来証明好了。

第 3 段(定理 7.1 的証明)　对于 $u_0\in L_2(R)$，由引理 2，作

$$(I+(-\Delta)^n)h=u_0$$

的弱解 h_0，它在 R_1 的位数为 $2n$。这样一来，h_0 遂又成为 $4n$ 阶椭算型方程

$$L(I+(-\Delta)^n)h=f$$

的弱解，且在 R_1 的位数为 $2n$。因此，应用第 2 段的論法于該方程，便知 h_0 在 R_1 的位数为 $(4n+p)$。从而由引理 1，

$$u_0=(I+(-\widetilde{\Delta})^n)h_0$$

在 R_1 的位数必为 $4n+p-2n=2n+p$。

§31　引理 1 的証明

我們要利用**函数的正則化**(regularisation)。为此，遵照 Friedrichs 引入**正則化算子**(mollifier)[1]。

正則化算子 J_δ　設 $\gamma=\int_{|x|<1}\exp(-1/(1-|x|^2))\,dx$，并定

[1] 南雲道夫教授譯成軟化算子(原书也用軟化算子这一术語。——校者注)。

义 $j(x)$ 为

$$j(x)=\begin{cases}\gamma^{-1}\exp(-1/(1-|x|^2)) & \text{当 } |x|<1,\\ 0 & \text{当 } |x|\geqslant 1,\end{cases} \tag{31.1}$$

那么

$$\left.\begin{array}{l} j(x)\in\mathfrak{D}^\infty(E^m),\ j(x)\geqslant 0,\ j(x)=j(-x),\\ |x|>1\text{ 时 } j(x)=0,\ \int_{E^m} j(x)dx=1. \end{array}\right\}$$

在此如果对于充分小的 $\delta>0$，令

$$j_\delta(x,x')=\delta^{-m}j\left(\frac{x-x'}{\delta}\right), \tag{31.2}$$

并以 R_δ 表示 R 内和 R 的边界 ∂R 的距离大于 δ 的所有点組成之开集，那么成立着

$$\int_R j_\delta(x,x')dx'\leqslant 1,\ \text{且 } x\in R_\delta \text{ 时 } \int_R j_\delta(x,x')dx'=1. \tag{31.3}$$

今对于 $u\in H_0(R)=L_2(R)$ 定义算子 J_δ 如下：

$$(J_\delta u)(x)=\int_R j_\delta(x,x')u(x')dx', \tag{31.4}$$

J_δ 称为正則化算子，函数 $J_\delta u$ 称为函数 u 的正則化。关于 J_δ 有

定理 7.3

$$\|J_\delta u\|_0\leqslant\|u\|_0, \tag{31.5}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\|J_\delta u-u\|_0=0, \tag{31.6}$$

$$\left.\begin{array}{l} D_x^{(s)}J_\delta u(x)=\int_R D_x^{(s)}j_\delta(x,x')u(x')dx',\ \text{从而}\\ J_\delta u(x)\ \text{属于 } C^\infty. \end{array}\right\} \tag{31.7}$$

証明 (31.7)是显然的。(31.5)的証明：由 Schwarz 不等式，

$$|J_\delta u(x)|^2\leqslant\left(\int_R\sqrt{j_\delta(x,x')}\cdot\sqrt{j_\delta(x,x')}\,|u(x')|dx'\right)^2$$

$$\leqslant\int_R j_\delta(x,x')dx'\cdot\int_R j_\delta(x,x')|u(x')|^2dx'.$$

因此，利用(31.3)与 $j_\delta(x,x')=j_\delta(x',x)$ 即得

$$\int_R |J_\delta u(x)|^2dx \leqslant 1\cdot\int_R\left\{\int_R j_\delta(x,\ x')dx\right\}\cdot|u(x')|^2dx'$$
$$\leqslant\int_R |u(x')|^2dx'.$$

(31.6)的証明：首先考虑 $u\in\mathfrak{D}^\infty(R)$ 且 $u(x)$ 的支集含于 R_{δ_0} 的情形。由(31.3)，如果 $0<\delta<\delta_0$，則当 $x\in R_{\delta_0}$ 时

$$u(x)=\int_R j_\delta(x,\ x')u(x)dx'.$$

因此这时有

$$J_\delta u(x)-u(x)=\int_R j_\delta(x,\ x')(u(x')-u(x))dx'$$
$$=\int_{|x-x'|<\delta} j_\delta(x,\ x')(u(x')-u(x))dx',$$

而由于 $u(x)$ 在 R 上的一致連續性与 $j_\delta\geqslant0$ 及(31.3)便知

当 $x\in R_{\delta_0}$ 时关于 x 一致地成立着 $\lim\limits_{\delta\to0}J_\delta u(x)=u(x)$. (31.8)

又由假定，当 $x\in R-R_{\delta_0}$ 时 $u(x)=0$，同样当 $x\in R-R_{\delta_0}$ 且 δ 充分小时

$$J_\delta u(x)=\int_{|x-x'|<\delta} j_\delta(x,\ x')u(x')dx'=0,$$

因此

当 $x\in R-R_{\delta_0}$ 时，$\lim\limits_{\delta\to0}|J_\delta u(x)-u(x)|=0$. (31.9)

再注意到

$$|J_\delta u(x)|\leqslant\int_R j_\delta(x,x')\cdot\max_{x'}|u(x')|dx'\leqslant\max_{x'}|u(x')|,$$

于是由(31.8)与(31.9)便証明了

当 $u\in\mathfrak{D}^\infty(R)$ 时，$\lim\limits_{\delta\to0}\|J_\delta u-u\|_0=0$. (31.10)

但对于任意的 $u\in L_2(R)$ 与任意的 $\varepsilon>0$，总可选 $u'\in\mathfrak{D}^\infty(R)$ 使 $\|u-u'\|_0<\varepsilon$，在不等式

$$\|J_\delta u-u\|\leqslant\|J_\delta(u-u')\|_0+\|J_\delta u'-u'\|_0+\|u'-u\|_0$$

中，由(31.5)，右边第一項 $\leqslant\|u-u'\|_0\leqslant\varepsilon$，由(31.10)，右边第二項，

当 $\delta\to 0$ 时 $\to 0$，右边第三項 $\leqslant\varepsilon$。于是最后(31.6)也得到証明。

証毕

引理 1 的証明 設 $0<\delta<\delta_0$，則当 $x'\in\partial R$，$x\in R_{\delta_0}$ 时 $j_\delta(x, x')=0$。因此，把由(31.7)所得的

$$D_x^{(s)}J_\delta u(x)=\int_R(-1)^{|s|}D_{x'}^{(s)}j_\delta(x, x')\cdot u(x')dx'$$

分部积分便知

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } u_0 \text{ 在 } R \text{ 的位数为 } i\text{，則当 } |s|\leqslant i,\ x\in R_{\delta_0} \text{ 且}\\ 0<\delta<\delta_0 \text{ 时 } D_x^{(s)}J_\delta u(x)=\int_R j_\delta(x, x')\widetilde{D}_{x'}^{(s)}u(x')dx'\\ \qquad\qquad\qquad =J_\delta\widetilde{D}_x^{(s)}u(x).\end{array}\right\}\quad(31.11)$$

根据上面的事实不难証明 (i)，(ii)。(i)的証明：設 $|t|\leqslant j$，那么由(31.11)，当 $x\in R_{\delta_0}$ 且 $\delta>0$ 充分小时

$$D_x^{(t)}D_x^{(s)}J_\delta u(x)=J_\delta\widetilde{D}_x^{(t)}\widetilde{D}_x^{(s)}u(x),$$

并且随着 $\delta\to 0$，由 (31.6) 上式右边按 R_{δ_0} 中范数 $\|\ \|_0$ 收斂于 $\widetilde{D}_x^{(t)}\widetilde{D}_x^{(s)}u(x)$。因此 $u(x)$ 在 R 的位数为 $(i+j)$。同样可得到(ii)的証明。

§ 32 引理 2 的証明

令
$$\tilde{u}_0(x)=\begin{cases}u_0(x) & x\in R_1,\\ 0 & x\in E^m-R_1,\end{cases}$$

則 $\tilde{u}_0\in L_2(E^m)$。設 $U_0(y)=(\mathfrak{F}\tilde{u}_0)(y)$，并令

$$h_0(x)=\left(\mathfrak{F}^*\frac{U_0(y)}{1+\left(\sum_{j=1}^{m}(2\pi y_j)^2\right)^s}\right)(x),\qquad(32.1)$$

則 h_0 就是所求的。現研究 h_0 的位数。首先，对于偏微分算子 $D_x^{(k)}$，$|k|\leqslant 2s$，

$$D_x^{(k)}h_n(x)=D_x^{(k)}\int_{|y|<n}\frac{U_0(y)}{1+\left(\sum_{j=1}^{m}(2\pi y_j)^2\right)^s}\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy$$

$$=\int_{|y|<n}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{m}(2\pi\sqrt{-1}y_j)^{k_j}}{1+\left(\sum_{j=1}^{m}(2\pi y_j)^2\right)^s}U_0(y)\right\}\exp(2\pi\sqrt{-1}y\cdot x)\,dy$$

成立。这里微分运算 $D_x^{(k)}$ 与积分运算 $\int_{|y|<n}$ 之所以可交换是因为在形式的交换两个运算后被积函数

$$\{\ \}\exp(2\pi\sqrt{-1}y\cdot x)$$

的絕对值 $|\{\ \}|$ 和 x 无关，而且由于 Schwarz 不等式与 $U_0(y)\in L_2(E^m)$，它在 $|y|\leqslant n$ 上是可积的：

$$\int_{|y|<n}|\{\ \}|\,dy$$

$$\leqslant\left(\int_{|y|<n}\left|\frac{\prod_{j=1}^{m}(2\pi\sqrt{-1}y_j)^{k_j}}{1+\left(\sum_{j=1}^{m}(2\pi y_i)^2\right)^s}\right|^2dy\cdot\int_{|y|<n}|U_0(y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

再者，由于 $|k|\leqslant 2s$，故 $\{\ \}$ 属于 $L_2(E^m)$，从而当 $n\to\infty$ 时 $D_x^{(k)}h_n(x)$ 按范数 $\|\ \|_0$ 收斂。又因同时有 $\lim_{n\to\infty}\|h_n-h_0\|_0=0$，故結果知 $h_0\in\widetilde{H}_{2s}(E^m)$，即 h_0 在 E^m 的位数为 $2s$。

其次，由 $\lim_{n\to\infty}\|h_n-h_0\|_0=0$ 及分部积分知道对于 $\phi\in\mathfrak{D}^\infty(E^m)$，

$$((I+(-\Delta)^s)\phi,\ h_0)_0=\lim_{n\to\infty}((I+(-\Delta)^s)\phi,\ h_n)_0$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\phi,\ (I+(-\Delta)^s)h_n)_0=(\phi,\ \mathfrak{F}^*\cdot U_0)_0$$

成立。由于 $\mathfrak{F}^*U_0=\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}\tilde{u}_0=\tilde{u}_0$，

$$((I+(-\Delta)^s\phi,\ h_0)_0=(\phi,\ u_0)_0.$$

即 h_0 确为 $(I+(-\Delta)^s)h=u_0$ 的弱解。

§33　引理3的証明

首先，由假定，$u_0\in L_2(R)$ 在 R 的位数为 n，且对于一切

$$\phi\in\mathfrak{D}^\infty(R_1),$$

$$|(L^*\phi,u_0)_0|=\left|\sum_{|\rho|=|\sigma|\neq 0}^{n}(-1)^{|\rho|+|\sigma|}(D^{(\sigma)}a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\phi,\ u_0)_0\right|$$
$$\leqslant \text{const}\cdot\|\phi\|_{n-1} \tag{33.1}$$

成立。这时取有界开集 R_1, R_2, 使得 $R_2\subset R_1\subset R$, 且 R_2 的閉包含于 R_1 之中, R_1 的閉包含于 R 之中。然后取 $\zeta\in\mathfrak{D}^\infty(R_1)$, 使得在 R_2 有 $\zeta(x)\equiv 1$, 那么,对于由 $v(x)=\zeta(x)u_0(x)$ 而作的函数

$$v^h(x)=h^{-1}(v(x^{(h)})-v(x)),x^{(h)}=(x_1+h,\ x_2,x_3,\cdots,x_m), \tag{33.2}$$

当 $|h|$ 充分小时,可以証明

$$\|v^h\|_n\leqslant \text{const} \tag{33.3}$$

成立。

(33.3)的証明容后补述,現在首先在它成立的假定下来証明引理3。$\{v^h\}$ 可看做是按 $\|\ \|_n$ 将 $\mathfrak{D}^\infty(R_1)$ 完备化所得的 Hilbert 空間 $H_n(R_1)$ 中的有界集,对它应用定理6.4的(i),便知存在收斂于0的数列 $\{h_i\}$,使得在 Hilbert 空間 $L_2(R_1)$ 中的弱收斂意义下有

$$\text{w-}\lim_{i\to\infty} v^{h_i}=\hat{v},$$
$$\text{w-}\lim_{i\to\infty}\widetilde{D}^{(k)}v^{h_i}=v^{(k)}\quad(|k|\leqslant n)$$

存在。不仅如此,我們还可証明

$$\left.\begin{aligned}&\hat{v}=\widetilde{D}_1 v\quad\left(\text{但 } D_1=\frac{\partial}{\partial x_1}\right),\\&v^{(k)}=\widetilde{D}_1\widetilde{D}^{(k)}v=\widetilde{D}^{(k)}\widetilde{D}_1 v.\end{aligned}\right\} \tag{33.4}$$

这就是說, $\widetilde{D}_1 v$ 在 R_1 的位数为 n. 同样 $\widetilde{D}_i v\ (i=2,3,\cdots,m)$ 在 R_1 的位数也是 n, 于是由引理1, v 在 R_1 的位数为 $(n+1)$, 从而鉴于 R_2, R_1 的任意性, u_0 在 R 的位数必为 $(n+1)$.

(33.4)的証明 对于 $\phi\in\mathfrak{D}^\infty(R_1)$, 通过变数变换(将 $x=(x_1,\cdots,x_m)$ 变为 $x^{-h}=(x_1-h,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$)易知当 $|h|$ 充分小时,有

$$(\phi,\ v^h)_0=-(\phi^{-h},\ v)_0. \tag{33.5}$$

利用此式及中值定理便知对于 $\phi\in\mathfrak{D}^{\infty}(R_1)$,

$$
\begin{aligned}
(\phi,\ \hat{v})_0 &= \lim_{i\to\infty}(\phi,\ v^{h_i})_0 = -\lim_{i\to\infty}(\phi^{-h_i},\ v)_0 \\
&= -\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x^{(-\theta_i h_i)}),\ v(x)\right)_0 \text{❶} \quad (0<\theta_i<1) \\
&= \lim_{i\to\infty}(\phi(x^{(-\theta_i h_i)}),\ \widetilde{D}_1 v(x))_0 \\
&= (\phi,\ \widetilde{D}_1 v)_0
\end{aligned}
$$

成立。所以, $\hat{v}=\widetilde{D}_1 v$. 又因容易知道有

$$(\widetilde{D}^{(k)}v)^h=\widetilde{D}^{(k)}v^h, \tag{33.6}$$

所以用上面的結果得到

$$v^{(k)}=\text{w-}\lim_{i\to\infty}\widetilde{D}^{(k)}v^{h_i}=\text{w-}\lim_{i\to\infty}(\widetilde{D}^{(k)}v)^{h_i}=\widetilde{D}_1(\widetilde{D}^{(k)}v),$$

至于 $\widetilde{D}_1(\widetilde{D}^{(k)}v)=\widetilde{D}^{(k)}(\widetilde{D}_1 v)$ 也成立的事实由 $D_1D^{(k)}=D^{(k)}D_1$ 可以明白。

最后(33.3)的証明 由于 u_0 在 R 的位数为 n, 由分部积分(設 $|\sigma|\leqslant n$) 得

$$
\begin{aligned}
(L^*\phi,\ v^h)_0 &= (-1)^{|\rho|+|\sigma|}(D^{(\sigma)}a^{\rho;\sigma}D^{(\rho)}\phi,\ (\zeta u_0)^h)_0 \\
&= (-1)^{|\rho|}(D^{(\rho)}\phi,\ a^{\rho;\sigma}\widetilde{D}^{(\sigma)}(\zeta u_0)^h)_0 \\
&= (-1)^{|\rho|}(D^{(\rho)}\phi,\ a^{\rho;\sigma}(\widetilde{D}^{(\sigma)}\zeta u_0)^h)_0 \quad (\text{用了(33.6)}) \\
&= (-1)^{|\rho|}(D^{(\rho)}\phi,\ a^{\rho;\sigma}(\zeta\cdot\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)^h)_0 \\
&\quad + (-1)^{|\rho|}C^{\sigma;\sigma'}(D^{(\rho)}\phi,\ a^{\rho;\sigma}\{(D^{(\sigma')}\zeta) \\
&\quad \cdot\widetilde{D}^{(\sigma-\sigma')}u_0\}^h)_0 \quad (|\sigma'|\geqslant 1).
\end{aligned} \tag{33.7}
$$

上面等式中的最后一步用了关于乘积 $\zeta\cdot u_0$ 的偏微分的 Leibniz 公式——$C^{\sigma;\sigma'}$ 为类似于二项系数的常数。

今若取 $\{u_i\}\subseteq C^{\infty}(R)$ 使 $\lim_{i\to\infty}\|u_0-u_i\|_n=0$, 那么因为 $D^{(\sigma')}\zeta$ 在 R_1 外为 0 $\left(\text{从而 } D^{(\sigma')}\zeta,\ \frac{\partial}{\partial x_1}D^{(\sigma')}\zeta \text{ 等在 } R_1 \text{ 有界}\right)$ 及 $|\sigma'|\geqslant 1$, 故

---

❶ 令 $-h^{-1}(\phi(x^{(-th)}),\ v(x))_0=F(t)$, 则

$(\phi^{-h},\ v)_0=F(1)-F(0)=F'_{x_1}(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x^{(-\theta h)}),\ v(x)\right)_0$.——譯者注

对于充分小的$|h|$，由中值定理得

$$\|\{(D^{(\sigma')}\zeta)\cdot\widetilde{D}^{(\sigma-\sigma')}u_0\}^h\|_0=\lim_{i\to\infty}\|\{(D^{(\sigma')}\zeta)D^{(\sigma-\sigma')}u_i\}^h\|_0$$

$$\leqslant\varliminf_{i\to\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\{(D^{(\sigma')}\zeta)\cdot D^{(\sigma-\sigma')}u_i\}(x^{(\theta_i h)})\right\|_0 \text{[1]} \quad (0<\theta_i<1)$$

$$\leqslant \text{const}\cdot\varliminf_{i\to\infty}\left(\int_{R_1}|D^{(\sigma)}u_i(x^{(\theta_i h)})|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{[2]}$$

$$\leqslant \text{const}\cdot\lim_{i\to\infty}\left(\int_R|D^{(\sigma)}u_i(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant \text{const}\cdot\|u_0\|_n. \quad (33.8)$$

从而对(33.7)右边第二項应用 Schwarz 不等式得到

$$|(-1)^{|\rho|}C^{\sigma;\sigma'}(D^{(\rho)}\phi,\ a^{\rho;\sigma}\{(D^{(\sigma')}\zeta)\cdot\widetilde{D}^{(\sigma-\sigma')}u_0\}^h)_0|$$

$$\leqslant \text{const}\cdot\|\phi\|_n\cdot\|u_0\|_n=\text{const}\cdot\|\phi\|_n.$$

另一方面，由于

$$(ef)^h(x)=e^h(x)f(x^{(h)})+e(x)f^h(x),$$

并注意(33.5)，关于(33.7)右边第一項

$$(-1)^{|\rho|}(D^{(\rho)}\phi,\ a^{\rho;\sigma}(\zeta\cdot\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)^h)_0$$

$$=(-1)^{|\rho|}(D^{(\rho)}\phi,\ \{(a^{\rho;\sigma}\zeta\cdot\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)^h$$

$$-(a^{\rho;\sigma})^h\cdot\zeta(x^{(h)})\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0(x^{(h)})\})_0$$

$$=(-1)^{|\rho|+1}((D^{(\rho)}\phi)^{-h},\ a^{\rho;\sigma}\zeta\cdot\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)_0$$

$$+(-1)^{|\rho|+1}(D^{(\rho)}\phi,\ (a^{\rho;\sigma})^h\zeta(x^{(h)})\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0(x^{(h)}))_0.$$

因为$\zeta(x)$在R_1外为0，故当$|h|$充分小时，由 Schwarz 不等式，右边第二項的絕对值

$$\leqslant \text{const}\cdot\|\phi\|_n\cdot\|u_0\|_n=\text{const}\cdot\|\phi\|_n.$$

又由(33.6)与 Leibniz 关于乘积的微分公式，上式右边第一項

---

[1] 設$y(x)\in\mathfrak{D}^\infty(R_1)$，易知$\lim\limits_{h\to0}\left\|y^h-\dfrac{\partial}{\partial x_1}y\right\|_0=0$，从而对于$H_0(R_1)$上的有界綫性泛函$f$及充分小的$|h|$，令$f(h^{-1}y^{(th)})=F(t)$时，有$F'(t)=f\left[\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(th)}\right]$。但由定理5.1系1，存在$f$滿足$f(y^h)=\|y^h\|_0$，故对此$f$有 $\|y^h\|=f(y^h)=F(1)-F(0)=F'(\theta)=f\left[\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(\theta h)}\right]\leqslant\|f\|\cdot\left\|\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{\theta h}\right\|_0=\left\|\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(\theta h)}\right\|_0$，$0<\theta<1$。——譯者注

[2] 原书θ_i作θ，$\varliminf$作$\lim$，又前行之$\leqslant$作$=$，今已改正。——譯者注

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{|\rho|}((D^{(\rho)}\phi)^{-h},\ a^{\rho|\sigma}\zeta\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)_0\\
&\quad=(-1)^{|\rho|}(D^{(\rho)}\phi^{-h},\ a^{\rho|\sigma}\zeta\widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)_0\\
&\quad=(-1)^{|\rho|}(a^{\rho|\sigma}\zeta D^{(\rho)}\phi^{-h},\ \widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)_0\\
&\quad=(-1)^{|\rho|}(a^{\rho|\sigma}D^{(\rho)}\zeta\phi^{-h},\ \widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)_0\\
&\qquad-(-1)^{|\rho|}C^{\rho;\rho'}(a^{\rho|\sigma}D^{(\rho')}\zeta\cdot D^{(\rho-\rho')}\phi^{-h},\ \widetilde{D}^{(\sigma)}u_0)_0\quad(|\rho'|\geqslant 1).
\end{aligned}
$$

右边第二項的絕対値由 Schwarz 不等式及$|\rho'|\geqslant 1$

$$\leqslant \text{const}\cdot\|\phi\|_{n-1}\leqslant \text{const}\cdot\|\phi\|_n,$$

而右边第一項等于$(L^*\zeta\phi^{-h},\ u_0)_0$。

这样，最后便得

$$|(L^*\phi,\ (\zeta u_0)^h)_0|\leqslant|(L^*\zeta\phi^{-h},\ u_0)_0|+\text{const}\cdot\|\phi\|_n.$$

此式右边第一項由引理 3 的假定$\leqslant \text{const}\cdot\|\zeta\phi^{-h}\|_{n-1}$，而这又$\leqslant \text{const}\cdot\|\varphi\|_n$，这一点可和导出 (33.8) 一样得知。于是只要$|h|$充分小，对于某一个和$\phi\in\mathfrak{D}^\infty(R_1)$无关的常数 K 有

$$|(L^*\phi,\ (\zeta u_0)^h)_0|\leqslant K\|\phi\|_n.$$

因为ζ属于$\mathfrak{D}^\infty(R_1)$，且u_0在R的位数为n，故可取属于$\mathfrak{D}^\infty(R_1)$的$\{\phi_i\}$使$\lim\limits_{i\to\infty}\|\phi_i-(\zeta u_0)^h\|_n=0$。从而当我們在由 Gårding 不等式 (16.1)[❶]所得的

$$\begin{cases}c_1\|\phi\|_n^2\leqslant(L^*\phi,\ \phi)_0+c_2\|\phi\|_0^2,\\ |(L^*\phi,\ \varphi)_0|\leqslant c_3\|\phi\|_n\cdot\|\varphi\|_n\end{cases}\qquad(\phi,\ \varphi\in\mathfrak{D}^\infty(R_1),\ c_i\ \text{正数})$$

中以$\phi=\phi_i$代入而令$i\to\infty$时，只要$|h|$充分小便得

$$c_1\|(\zeta u_0)^h\|_n^2\leqslant K\|(\zeta u_0)^h\|_n+c_2\|(\zeta u_0)^h\|_0^2.$$

由此卽知，如果$|h|$充分小，必然有$\|(\zeta u_0)^h\|_n\leqslant \text{const}$，也就是說 (33.3) 成立。

---

❶　由于R_1的閉包是含于R內部的有界閉集，故条件 (15.7') 在R_1是满足的。——譯者注

第8章　半群的微分可能性与表示

在遍历理論中，我們研究的主題是关于从 Banach 空間 X 到 X 中的有界加法算子 T 的乘冪 T^m 所作的算术平均 $n^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}T^m$ 当 $n\to\infty$ 时的状况，这个 T^m 具有半群(semi-group)的性质

$$T^mT^n=T^{m+n},\quad T^0=I\quad (m, n=0, 1, 2, \cdots).$$

将参数 m 推广为实数 $t\geqslant 0$，考察满足条件

(i)　$T_tT_s=T_{t+s},\quad T_0=I\quad (t, s\geqslant 0)$,

(ii)　$\operatorname{s-lim}\limits_{t\to t_0} T_tx=T_{t_0}x\quad (x\in X,\ t_0\geqslant 0)$

及对于某个 $\beta\geqslant 0$,

(iii)　$\|T_t\|\leqslant e^{\beta t}\quad (t\geqslant 0)$

的由 X 到 X 中的有界加法算子 T_t 所成的族 $\{T_t\}$，它們出現于分析的各个方面(見 §34 的例)。这种 $\{T_t\}$ 称为(Banach 空間 X 中**标准型**[1]**的)半群**。

如果对于半群 $\{T_t\}$，用

$$\operatorname{s-lim}_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h-I)x=Ax$$

来定义它的**生成算子** A 的話，那么，A 的定义域 $\mathfrak{D}(A)$ 在 X 内稠密，而且

(iv)　当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时，

$$\operatorname{s-lim}_{h\to 0} h^{-1}(T_{t+h}-T_t)x=AT_tx=T_tAx$$

成立。不仅如此，它还满足：

---

[1] 标准型是 Hille 这样称的，本章可参考 E. Hille: Functional analysis and semi-groups (有与 R. S. Phillips 合著的 1957 年版本——校者注) 或 K. Yosida: On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators, J. Math. Soc. Japan, 1 (1948), 15~21.

当 $n>\beta$ 时，逆算子 $J_n=(I-n^{-1}A)^{-1}$ 为有界加法算子，且

$$J_n x = n\int_0^\infty e^{-nt}T_t x dt, \quad \|J_n\| \leqslant (1-n^{-1}\beta)^{-1}.$$

反之，如果对于 $\mathfrak{D}(A)$ 在 X 中稠密的加法算子 A，$(I-n^{-1}A)$ $(n>\beta)$ 具有有界逆算子 J_n 而且满足 $\|J_n\|\leqslant(1-n^{-1}\beta)^{-1}$ 的話，那么也可以証明 A 必是满足(i)～(iii)的某个半群 $\{T_t\}$ 的生成算子。更进一步，半群乃是由它的生成算子而生成(产生)的。也就是因为由 A 生成 T_t 的具体方式是由(37.4)所給出的，所以在无限維空間里的"指数函数"

$$T_t x=\exp(tA)x$$

的定义(以及它具有通常的特性)遂成为可能。当給定 A 时，利用这指数函数，就可将形如(iv)的**发展方程**(equation of evolution)在初値条件

$$\operatorname*{s-lim}_{t\downarrow 0} T_t x = x$$

之下予以解出。关于这些将在下一章中叙述。

§34 半群的一些例

首先为了說明条件(iii)的意义，引入

定理 8.1 (E. Hille) 如果 $\{T_t\}$ 满足(i)，(ii)，那么对于某个 $\gamma\geqslant-\infty$，成立着

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\log\|T_t\| = \inf_{t>0} t^{-1}\log\|T_t\| = \gamma<\infty \tag{34.1}$$

及

$$\text{在 } t \text{ 的任意有限区間上 } \|T_t\| \text{ 有界。} \tag{34.2}$$

因此(iii)便等价于存在这样一个正数 δ，使

$$t\downarrow 0 \text{ 时 } \|T_t\|\leqslant 1+\delta t. \tag{34.3}$$

(34.1)及(34.2)的証明 首先，假如(34.2)不成立，那么势必存在 $\{t_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t_\infty,\ 0 \leqslant t_\infty < \infty \quad \text{且} \quad \|T_{t_n}\| > n \quad (n=1, 2, \cdots).$$

这个由于从(ii)得到的 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} T_{t_n}x = T_{t_\infty}x$ 而是和共鳴定理矛盾的。

其次，命

$$p(t) = \log \|T_t\|,$$

那么，由于 $\|T_{t+s}\| = \|T_t \cdot T_s\| \leqslant \|T_t\| \cdot \|T_s\|$ 及 $p(t) < \infty$,

$$p(t+s) \leqslant p(t) + p(s)$$

且 $\gamma = \inf\limits_{t>0} t^{-1} p(t)$ 不管是否 $-\infty$，总是 $<\infty$ 的。設 γ 为有限，对于任意的 $\varepsilon > 0$，取 $a > 0$ 使 $p(a) \leqslant (\gamma + \varepsilon) a$。对于正数 t，再取整数 $n \geqslant 0$ 使 $na \leqslant t < (n+1)a$，那么

$$\gamma \leqslant t^{-1} p(t) \leqslant t^{-1}\{p(na) + p(t-na)\} \leqslant \frac{na}{t} \frac{p(a)}{a} + \frac{p(t-na)}{t}.$$

由于 $p(t-na)$ 有界，右边第二项当 $t\to\infty$ 时 $\to 0$。又右边第一项 $\leqslant (\gamma + \varepsilon)$。从而說明了 $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} p(t) = \gamma$。用同样論法可說明卽使在 $\gamma = -\infty$ 时这极限式也成立。

半群之例 1　$C[0, \infty]$ 中的

$$(T_t x)(s) = x(t+s).$$

例 2　$C[0, \infty]$ 中的

$$(T_t x)(s) = e^{\beta t} x(s) \qquad (\beta \text{ 有限}).$$

例 3　$C[-\infty, \infty]$ 中的

$$\left.\begin{aligned}(T_t x)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(s-u)^2}{2t}} x(u)\, du && (t>0), \\ &= x(s) && (t=0).\end{aligned}\right\}$$

例 3 为半群的証明　因为对于

$$N_t(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}}$$

有

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_t(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} N_1(w)\, dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}}\, dw = 1,$$

所以

$$\|T_t x\| \leqslant \|x\| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, du = \|x\|,$$

从而 $\|T_t\|\leqslant 1$，又令 $s-u=\sqrt{t}\,z$，同理有

$$(T_t x)(s)-x(s)=\int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)(x(u)-x(s))du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)(x(s-\sqrt{t}\,z)-x(s))dz.$$

由于 $x(s)$ 在 $[-\infty, \infty]$ 一致連續，故对于任意的 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 充分小，使得 $|\sqrt{t}\,z|\leqslant\delta$ 时总有 $\sup_s|x(s-\sqrt{t}\,z)-x(s)|\leqslant\varepsilon$。因此

$$\|T_t x-x\|\leqslant\int_{|\sqrt{t}z|\leqslant\delta} N_1(z)\,|x(s-\sqrt{t}\,z)-x(s)|\,dz$$
$$+2\|x\|\int_{|\sqrt{t}z|>\delta} N_1(z)dz.$$

右边第一项$=\varepsilon$。又右边第二项当 $t\downarrow 0$ 时 $\to 0$。因此 $\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\|T_t x-x\|\leqslant\varepsilon$，从而 $\text{s-}\lim_{t\downarrow 0} T_t x=x$。

其次，由熟知的公式

$$(2\pi(t+t'))^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u^2}{2(t+t')}}=(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}(2\pi t')^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-v)^2}{2t}}e^{-\frac{v^2}{2t'}}dv,$$

$T_t T_{t'}x=T_{t+t'}x$ 便得到說明。从而，当 $t_0>0$ 时，由上面得

$$\text{s-}\lim_{t\downarrow t_0} T_t x=\text{s-}\lim_{t'\downarrow 0} T_{t'}T_{t_0}x=T_{t_0}x.$$

因为同理又有 $T_{t_0}x-T_{t_0-s}x=T_{t_0-s}(T_s-I)x$，遂得

$$\|T_{t_0}x-T_{t_0-s}x\|\leqslant\|T_{t_0-s}\|\cdot\|(T_s-I)x\|\leqslant\|(T_s-I)x\|,$$

从而 $\text{s-}\lim_{t\uparrow t_0} T_t x=T_{t_0}x$。这样 $\text{s-}\lim_{t\to t_0} T_t x=T_{t_0}x$ 也得到說明。

§35　半群的微分可能性

X 中半群 $\{T_t\}$ 的所謂**生成算子** (infinitesimal generator) A 是依

$$\text{s-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h-I)x=Ax \tag{35.1}$$

而定义的。也就是説，所有能使 $\text{s-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h-I)x$ 存在的 $x\in X$ 的全体作为 A 的定义域 $\mathfrak{D}(A)$，在其上依定义

$$Ax=\text{s-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h-I)x$$

而得到的加法算子 A 便称为 $\{T_t\}$ 的生成算子。至于所以称为生

成算子的理由，从定理 8.5 便能明白。

定理 8.2 (半群的微分可能性定理) $\mathfrak{D}(A)$在 X 中按范数意义稠密，且当 $x\in\mathfrak{D}(A)$时，

$$D_t T_t x = \text{s-}\lim_{h\to 0} h^{-1}(T_{t+h}-T_t)x = AT_t x = T_t Ax. \quad (35.2)$$

証明 設 $\varphi_n(s)=ne^{-ns}$, $(n>\beta)$, 并考虑

$$C_{\varphi_n}\cdot x = \int_0^\infty \varphi_n(s) T_s\cdot x\, ds. \quad (35.3)$$

对于任意的 $x\in X$, 因为 $\varphi_n(s)T_s x$ 按范数意义关于 s 連續(强連續)，而且由于

$$\|\varphi_n(s)T_s\cdot x\| \leqslant ne^{(-n+\beta)s}\|x\|$$

及 $n>\beta$，故 $\|\varphi_n(s)T_s\cdot x\|$ 在 $[0,\infty]$ 上可积，故可以定义 Riemann 式的积分 $\int_0^\infty \varphi_n(s)T_s x\,ds$，而 C_{φ_n} 成为由 X 到 X 內的有界加法算子，且

$$\|C_{\varphi_n}\| \leqslant n\int_0^\infty e^{(-n+\beta)s}ds = \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-1}. \quad (35.4)$$

今証，对于任意的 $x\in X$, $C_{\varphi_n}\cdot x\in\mathfrak{D}(A)$. 設 $h>0$, 則

$$\begin{aligned}
h^{-1}(T_h-I)C_{\varphi_n}x &= h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s)T_hT_s\cdot x\,ds - h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s)T_s\cdot x\,ds \\
&= h^{-1}\int_h^\infty \{\varphi_n(s-h)-\varphi_n(s)\}T_s\cdot x\,ds \\
&\quad - h^{-1}\int_0^h \varphi_n(s)T_s\cdot x\,ds.
\end{aligned}$$

最右边第二項，由于 $\varphi_n(s)T_s\cdot x$ 关于 s 的强連續性，当 $h\downarrow 0$ 时 $\to -\varphi_n(0)T_0\cdot x=-nx$. 又最右边第一項

$$\begin{aligned}
&= \int_h^\infty -\varphi_n'(s-\theta h)T_s x\,ds, \qquad 0<\theta<1 \\
&= \int_0^\infty -\varphi_n'(s)T_s\cdot x\,ds + \int_0^h \varphi_n'(s)T_s\cdot x\,ds \\
&\qquad + \int_h^\infty \{\varphi_n'(s)-\varphi_n'(s-\theta h)\}T_s\cdot x\,ds,
\end{aligned}$$

由于 $\varphi_n'(s)T_s\cdot x$ 关于 s 的强連續性，$\text{s-}\lim\limits_{h\to 0}\int_0^h \varphi_n'(s)T_s x\,ds=0$。又因 $\varphi_n'(s)=-n^2e^{-ns}$，故由于 $n>\beta$ 与 $\|T_s\|\leqslant e^{\beta s}$ 而

$$\left\|\int_h^\infty \{\varphi_n'(s)-\varphi_n'(s-\theta h)\}T_s\cdot x\,ds\right\|$$

$$\leqslant n^2\int_h^\infty (e^{-n(s-\theta h)}-e^{-ns})e^{\beta s}ds\cdot\|x\|$$

$$=n^2(e^{n\theta h}-1)\int_h^\infty e^{(\beta-n)s}ds\cdot\|x\|\to 0\qquad (h\downarrow 0).$$

这説明了对于任意的 $x\in X$，

$$C_{\varphi_n}\cdot x\in\mathfrak{D}(A)\quad 且\quad AC_{\varphi_n}\cdot x=n(C_{\varphi_n}-I)x.\qquad(35.5)$$

再者，由于 $\int_0^\infty ne^{-ns}ds=1$，

$$C_{\varphi_n}x-x=\int_0^\infty \varphi_n(s)(T_sx-x)ds,$$

因此，对于任意的 $\delta>0$，

$$\|C_{\varphi_n}x-x\|\leqslant\int_0^\delta \varphi_n(s)\|T_sx-x\|ds+\int_\delta^\infty ne^{-ns}(e^{\beta s}+1)ds\cdot\|x\|$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant s\leqslant\delta}\|T_s\cdot x-x\|+\|x\|\int_\delta^\infty ne^{-ns}(e^{\beta s}+1)ds.$$

最右边第一項当 $\delta>0$ 时随着 δ 而任意小，又第二項当固定 δ 时，随着 $n\to\infty$ 而 $\to 0$。从而説明了

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} C_{\varphi_n}x=x,\qquad x\in X,\qquad(35.6)$$

結合上面，便知 $\mathfrak{D}(A)$ 在 X 内的强稠密性。

其次，由于 T_t 为有界算子，故当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时，

$$T_t\cdot Ax=T_t\cdot\text{s-}\lim_{h\downarrow 0}h^{-1}(T_h-I)x=\text{s-}\lim_{h\downarrow 0}h^{-1}(T_{t+h}-T_t)x$$

$$=\text{s-}\lim_{h\downarrow 0}h^{-1}(T_h-I)T_t\cdot x=AT_t\cdot x$$

成立，也就是説，

$$当\ x\in\mathfrak{D}(A)时，T_t\cdot x\in\mathfrak{D}(A)\quad 且\quad T_tAx=AT_tx.\qquad(35.7)$$

今設 $x\in\mathfrak{D}(A)$，$f\in X^*$，那么，由上所述，$f(T_tx)$ 在 t 有右导

数，而且由于 $T_t Ax = AT_t x$ 得

$$\frac{d^+ f(T_t x)}{dt} = f(AT_t x) = f(T_t Ax).$$

因此这时 $\frac{d^+ f(T_t x)}{dt}$ 关于 t 连續，从而

$$f(T_t x) - f(T_0 x) = \int_0^t f(T_s A\cdot x)\,ds = f\left(\int_0^t T_s Ax\,ds\right)❶.$$

于是由定理 5.1′ 系 1，

$$T_t x - x = \int_0^t T_s Ax\,ds, \qquad x\in\mathfrak{D}(A).$$

由于 $T_s Ax$ 关于 s 的强連續性，$T_t x$ 必按范数意义关于 t 可以微分，且由 (35.7)，

$$\begin{aligned}\text{s-}\lim_{h\to 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)x &= \text{s-}\lim_{h\to 0} h^{-1}\int_t^{t+h} T_s Ax\,ds\\ &= T_t Ax = AT_t x.\end{aligned}$$

§36 生成算子

定理 8.3 設 A 为半群 $\{T_s\}$ 的生成算子，則对于任意的 $n>\beta$，$(I-n^{-1}A)$ 的逆算子 J_n 为从 X 到 $\mathfrak{D}(A)$ 全体的有界加法算子，且

$$J_n x = n\int_0^\infty e^{-nt} T_t x\,dt = C_{\varphi_n}\cdot x, \tag{36.1}$$

$$\|J_n\| \leqslant (1-n^{-1}\beta)^{-1}. \tag{36.2}$$

証明 由于 (35.5)，

当 $x\in X$ 时，恒有 $(I-n^{-1}A)C_{\varphi_n}\cdot x = x \qquad (n>\beta)$.

---

❶ 我們知道，若实函数 $g(t)$ 的右导数 $\frac{d^+g(t)}{dt}$ $\left(\text{或左导数 } \frac{d^-g(t)}{dt}\right)$ 在某区間連續，則在該区間导数 $\frac{dg(t)}{dt}$ 存在，且 $\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d^+g(t)}{dt} = \frac{d^-g(t)}{dt}$ 成立。

即$(I-n^{-1}A)$将含有$\mathfrak{W}(C_{\varphi_n})$的$\mathfrak{D}(A)$加法的映照到全体$X$.因此，如果能指出逆算子$(I-n^{-1}A)^{-1}$存在的話，那么必然$(I-n^{-1}A)^{-1}=C_{\varphi_n}$，而由(35.4)立刻可得(36.2)。但假如逆算子$(I-n^{-1}A)^{-1}$不存在，那么由(3.8)，势将存在$x_0\in\mathfrak{D}(A)$使$\|x_0\|=1$，且

$$(I-n^{-1}A)x_0=0.$$

因为由定理5.1′系1，总可选$f_0\in X^*$，使$\|f_0\|=1$且$f_0(x_0)=\|x_0\|=1$，故对于$f_0(T_tx_0)=\varphi(t)$得

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=f_0(T_tAx_0)=f_0(T_t\cdot nx_0)=nf_0(T_tx_0)=n\varphi(t),$$

$$\varphi(0)=f_0(x_0)=1,$$

而$\varphi(t)=e^{nt}$。另一方面，由于

$$|\varphi(t)|=|f_0(T_tx_0)|\leqslant\|f_0\|\cdot\|T_t\|\cdot\|x_0\|\leqslant e^{\beta t}\cdot\|x_0\|=e^{\beta t},$$

$n>\beta$时$e^{nt}\leqslant e^{\beta t}$，这是不合理的，因此如上的$x_0$不可能存在，而$(I-n^{-1}A)^{-1}$不得不存在。

系1　由$J_n=(I-n^{-1}A)^{-1}$及(35.6)得

$$\left.\begin{aligned}&AJ_n=n(J_n-I);\\&J_nAx=AJ_nx=n(J_n-I)x,\\&x\in\mathfrak{D}(A),\end{aligned}\right\}\tag{36.3}$$

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty}J_nx=x.\tag{36.4}$$

系2　生成算子A是在下面所述意义之下的**閉算子**(closed operator)：

$$\left.\begin{aligned}&\text{若 }x_m\in\mathfrak{D}(A)\text{ 且 s-}\lim_{m\to\infty}x_m=x,\ \text{s-}\lim_{m\to\infty}Ax_m=y\text{ 存在},\\&\text{則 }x\in\mathfrak{D}(A)\text{ 且 }y=Ax.\end{aligned}\right\}\tag{36.5}$$

証明　令$(I-n^{-1}A)x_m=y_m$，则$\text{s-}\lim\limits_{m\to\infty}y_m=x-n^{-1}y$。又由(36.3)有$x_m=J_n(I-n^{-1}A)x_m=J_ny_m$，故

$$x=\text{s-}\lim_{m\to\infty}x_m=\text{s-}\lim_{m\to\infty}J_ny_m=J_n(x-n^{-1}y).$$

由此得

$$(I-n^{-1}A)x=(I-n^{-1}A)J_n(x-n^{-1}y)=x-n^{-1}y,$$

亦即 $Ax=y$。

生成算子之例 §34 的例 1 对于 $x(s)\in C[0,\infty]$，$(T_tx)(s)=x(t+s)$。由于

$$(J_nx)(s)=y_n(s)=\int_0^\infty ne^{-nt}x(t+s)dt=\int_s^\infty ne^{n(s-t)}x(t)dt$$

而 $x(t)$ 是有界連續的，所以 $y_n'(s)=-nx(s)+ny_n(s)$，从而

$$(AJ_nx)(s)=(Ay_n)(s)=\{n(J_n-I)x\}(s)=y_n'(s)=\frac{d}{ds}(J_nx)(s).$$

因此，当 $y\in\mathfrak{D}(A)$ 时，由于(36.3)与(36.4)，$y'(s)\in C[0,\infty]$，而 $(Ay)(s)=y'(s)$。反之，若 $y(s)$，$y'(s)$ 同时 $\in C[0,\infty]$，那么，令

$$y'(s)-ny(s)=-nx(s),$$

则 $y_n(s)=(J_nx)(s)$ 满足 $y_n'(s)-ny_n(s)=-nx(s)$。从而 $w(s)=y_n(s)-y(s)$ 满足方程

$$w'(s)-nw(s)=0.$$

为了这微分方程的解 $w(s)=Ce^{ns}$ 属于 $C[0,\infty]$，必須 $C=0$ 即 $w(s)\equiv0$，也就是 $y_n(s)\equiv y(s)$。

这样一来，便知 $(T_tx)(s)=x(t+s)$ 的生成算子 A 乃是由

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{D}(A)=\{y(s);\ y(s)\ \text{及}\ y'(s)\in C[0,\infty]\}\ \text{且}\\ \text{当}\ y(s)\in\mathfrak{D}(A)\ \text{时}\ (Ay)(s)=y'(s)\end{array}\right\}$$

来定义的。

§34 的例 3 对于 $x(s)\in C[-\infty,\infty]$，$(T_tx)(s)=\int_{-\infty}^\infty N_t(s-u)x(u)du$。

$$(J_nx)(s)=\int_{-\infty}^\infty x(u)du\left\{\int_0^\infty\frac{n}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\left(nt+\frac{(s-u)^2}{2t}\right)}dt\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^\infty x(u)du\left\{\int_0^\infty\frac{\sqrt{n}\,2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(s_1^2+\frac{n(s-u)^2}{2s_1^2}\right)}ds_1\right\}^{❶}\quad\left(\text{令}\,t=\frac{s_1^2}{n}\right).$$

为了計算{ }，利用

---

❶ 原书 s_1 的地方写成 s，有誤。——校者注

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=e^{2c}\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-\left(s^2+\frac{c^2}{s^2}\right)}\left(1+\frac{c}{s^2}\right)ds\quad\left(令x=s-\frac{c}{s},\ c>0\right)$$

$$=e^{2c}\left[\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-\left(s^2+\frac{c^2}{s^2}\right)}ds+\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-\left(s^2+\frac{c^2}{s^2}\right)}\frac{c}{s^2}\,ds\right]$$

$$=e^{2c}\left[\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-\left(s^2+\frac{c^2}{s^2}\right)}ds+\int_0^{\sqrt{c}}e^{-\left(t^2+\frac{c^2}{t^2}\right)}dt\right]\quad\left(在第二项中令\ s=\frac{c}{t}\right)$$

$$=e^{2c}\int_0^\infty e^{-\left(s^2+\frac{c^2}{s^2}\right)}ds,$$

亦即

$$\int_0^\infty e^{-\left(s^2+\frac{c^2}{s^2}\right)}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c},\quad c>0.$$

于是得

$$\{\quad\}=\frac{\sqrt{n}\,2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}|s-u|}=\sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\sqrt{2n}|s-u|},$$

而

$$y_n(s)=(J_nx)(s)=\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\sqrt{2n}|s-u|}x(u)du.$$

可是由于 $x(s)$ 为有界連續函数,

$$y_n(s)=\sqrt{\frac{n}{2}}\left[\int_{-\infty}^s e^{-\sqrt{2n}(s-u)}x(u)du+\int_s^\infty e^{-\sqrt{2n}(u-s)}x(u)du\right],$$

$$y_n'(s)=\sqrt{\frac{n}{2}}\left[x(s)-x(s)-\sqrt{2n}\int_{-\infty}^s e^{-\sqrt{2n}(s-u)}x(u)du\right.$$

$$\left.+\sqrt{2n}\int_s^\infty e^{-\sqrt{2n}(u-s)}x(u)du\right],$$

$$y_n''(s)=\sqrt{\frac{n}{2}}\left[-\sqrt{2n}x(s)-\sqrt{2n}x(s)+2n\int_{-\infty}^s e^{-\sqrt{2n}(s-u)}x(u)du\right.$$

$$\left.+2n\int_s^\infty e^{-\sqrt{2n}(u-s)}x(u)du\right]=-2nx(s)+2ny_n(s),$$

从而

$$(AJ_nx)(s)=(Ay_n)(s)=\{n(J_n-I)x\}(s)$$

$$=\frac{1}{2}y_n''(s)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}(J_nx)(s).$$

因此,当 $y\in\mathfrak{D}(A)$ 时,$y''(s)\in C[-\infty,\infty]$ 而 $(Ay)(s)=\frac{1}{2}y''(s)$. 反之,若 $y(s)$, $y''(s)$ 同时 $\in C[-\infty,\infty]$, 令

$$\frac{1}{2n}(2ny(s)-y''(s))=x(s),$$

則$(J_nx)(s)=y_n(s)$滿足$y_n''(s)=-2nx(s)+2ny_n(s)$。从而

$$w''(s)-2nw(s)=0,\quad w(s)=y_n(s)-y(s).$$

为了这微分方程的解 $w(s)=C_1e^{\sqrt{2n}s}+C_2e^{-\sqrt{2n}s}$ 属于$C[-\infty,\infty]$，必須$C_1=0$，$C_2=0$。因此$w(s)\equiv 0$，也就是$y_n(s)=y(s)$。

这样一来，便知$(T_tx)(s)=\int_{-\infty}^{\infty}N_t(s-u)x(u)du$的生成算子$A$乃是由

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{D}(A)=\{y(s);\ y(s)\text{ 及 }y''(s)\in C[-\infty,\infty]\}\text{ 且}\\ \text{当 }y(s)\in\mathfrak{D}(A)\text{ 时 }(Ay)(s)=\dfrac{1}{2}y''(s)\end{array}\right\}$$

而定义的。

§37 半群的表示

首先給出

有界加法算子B的指数函数$\exp B$之定义 若$k>p$，那么，由于

$$\left\|\sum_{j=0}^{k}(j!)^{-1}B^j-\sum_{j=0}^{p}(j!)^{-1}B^j\right\|\leqslant\sum_{j=p+1}^{k}(j!)^{-1}\|B\|^j$$

当$p\to\infty$时$\to 0$，所以对$\|x\|\leqslant 1$的x，一致地存在

$$\operatorname*{s-lim}_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}(j!)^{-1}B^jx.$$

我們以此来定义$(\exp B)\cdot x$，亦即

$$(\exp B)x=\operatorname*{s-lim}_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}(j!)^{-1}B^jx.\qquad(37.1)$$

定理8.4

若$BC=CB$，則

$$\exp B\cdot\exp C=\exp(B+C),\qquad(37.2)$$

$$D_t\exp(tB)x=\operatorname*{s-lim}_{h\to 0}h^{-1}\{\exp(t+h)B-\exp tB\}x$$
$$=B\cdot(\exp(tB))x=(\exp(tB))\cdot Bx.\qquad(37.3)$$

証明 (37.2)只需象証明β，γ是复数情形的

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j!)^{-1}\beta^j\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1}\gamma^k=\sum_{l=0}^{\infty}(l!)^{-1}(\beta+\gamma)^l$$

一样来处理就可以了。由于在左边 $\beta^j\gamma^k$ 的系数与在右边 $\beta^j\gamma^k$ 的系数是相等的，利用 B 与 C 的可交换性，即 $BC=CB$，也就可説明

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j!)^{-1}B^j\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1}C^k=\sum_{l=0}^{\infty}(l!)^{-1}(B+C)^l.$$

其次，利用(37.2)，

$$\begin{aligned}h^{-1}\{\exp(t+h)B-\exp tB\}&=\exp tB\cdot h^{-1}(\exp hB-I)\\&=h^{-1}(\exp hB-I)\exp tB,\end{aligned}$$

由于

$$\left\|\frac{\exp hB-I}{h}-B\right\|\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}h^{k-1}\|B\|^k(k!)^{-1}\to 0\ (h\to 0),$$

便得(37.3)。

定理 8.5 (半群的表示定理)　設半群 $\{T_t\}$ 的生成算子为 A，那么，当固定 $y\in X$ 时，对于任意一个有限区間中的 t 一致地成立着

$$T_t y=\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}\exp(tAJ_n)\cdot y. \tag{37.4}$$

証明　首先由(36.3)有 $AJ_n=n(J_n-I)$，从而 tAJ_n 为有界加法算子，因此 $\exp(tAJ_n)$ 是有定义的。并且由于 nJ_n 和 nI 是可交换的，有

$$\begin{aligned}\exp(tAJ_n)&=\exp(-tnI)\exp(tnJ_n)\\&=\exp(-tn)\exp(tnJ_n).\end{aligned}$$

从而再由(36.2)即 $\|J_n\|\leqslant(1-n^{-1}\beta)^{-1}$ 得

$$\begin{aligned}\|\exp(tAJ_n)\|&\leqslant\exp(-tn)\exp(tn(1-n^{-1}\beta)^{-1})\\&=\exp(\beta t/(1-n^{-1}\beta)).\end{aligned}\tag{37.5}$$

其次，因为根据(36.1)，J_n 与 T_s 是可交换的，所以 $AJ_n=n(J_n-I)$ 与 T_s 也可交换，从而，当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时利用(35.2)的成立及(37.3)，

$$T_t x - \exp(tAJ_n)\cdot x = \int_0^t \frac{d}{ds}\{\exp((t-s)AJ_n)\cdot T_s\cdot x\}ds$$

$$= \int_0^t \exp((t-s)AJ_n)\cdot T_s\cdot(A - AJ_n)x ds.$$

于是当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时，由于可应用(iii)，(37.5)及(36.3)，从上式遂得

$$\|T_t x - \exp(tAJ_n)x\|$$

$$\leqslant \int_0^t \exp\frac{\beta(t-s)}{1-n^{-1}\beta}\cdot\exp\beta s\|(A-J_nA)x\|ds.$$

因为对于 $s<t$，$\exp\frac{\beta(t-s)}{1-n^{-1}\beta}\cdot\exp\beta s$ 作为 s 的函数，当 $n\to\infty$ 时是一致有界的，所以由(36.4)，当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时对于任意一个有限区間中的 t 一致地成立着

$$\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\exp(tAJ_n)\cdot x = T_t x.$$

但因 $\mathfrak{D}(A)$ 在 X 内稠密，故对于任意的 $y\in X$ 与任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 使 $\|y-x\|\leqslant\varepsilon$。于是由(iii)与(37.5)得

$$\|T_t y - \exp(tAJ_n)\cdot y\| \leqslant \|T_t y - T_t x\| + \|T_t x - \exp(tAJ_n\cdot x)\|$$

$$+\|\exp(tAJ_n)\cdot x - \exp(tAJ_n)\cdot y\|$$

$$\leqslant \exp(\beta t)\cdot\varepsilon + \|T_t x - \exp(tAJ_n)\cdot x\|$$

$$+\exp(\beta t/(1-n^{-1}\beta))\cdot\varepsilon,$$

从而对于任意有限区間 $[0,t_0]$ 的 t 一致地

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_t\cdot y - \exp(tAJ_n)\cdot y\| \leqslant 2\exp(\beta t_0)\cdot\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，最后便說明了(37.4)。

注 如果将(37.4)的右边略記为 $\exp(tA)\cdot y$，那么

$$T_t = \exp(tA). \qquad (37.4')$$

这就是說在定理 8.5 的意义下，可以定义非有界算子 tA 的指数函数，也正是(37.4′)說明了 A 之所以称为半群 T_t 的生成算子的緣故。

表示定理之例 **§34 的例 1** 对于 $x(s)\in C[0,\infty]$ 在范数

$$\|x\| = \sup_{0\leqslant s<\infty}|x(s)|$$

的意义下，对于任意有限区間的 t 一致地有

$$x(t+s)=\text{s-}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{-1}t^m((AJ_n)^m x)(s).$$

特别是当 $x(s)$ 为有限区間 $[0, \alpha]$，$\alpha<\infty$，上的連續函数时，在将 $x(s)$ 延拓为 $[0, \infty)$ 上的有界一致連續函数 $\tilde{x}(s)$ 之后，对属于 $[0, \alpha]$ 的 t 一致地成立着

$$x(t)=\tilde{x}(t)=\text{s-}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(m!)^{-1}t^m((AJ_n)^m\tilde{x})(0).$$

也就是說，$[0, \alpha]$ 上的連續函数 $x(t)$ 在 $[0, \alpha]$ 上可以由 t 的多項式一致地来逼近，而这就是 Weierstrass 的多項式逼近定理。

§38 生成算子的特征

定理 8.3 的逆命題在如下形式之下成立，它在抛物型扩散方程的积分上得到应用(§40)。

定理 8.6 設 Banach 空間 X 的子空間 $\mathfrak{D}(A)$ 按范数意义在 X 内稠密，如果从 $\mathfrak{D}(A)$ 到 X 内的加法算子 A 满足下列条件，那么 A 必为某半群的生成算子：

$$\left.\begin{array}{l}\text{存在某个 }\beta>0\text{，当整数 }n\text{ 充分大时 }J_n=(I-n^{-1}A)^{-1}\\ \text{为有界加法算子，且 }\|J_n\|\leqslant(1-n^{-1}\beta)^{-1}.\end{array}\right\}\quad(38.1)$$

这就是說，$\mathfrak{D}(A)$ 在 X 内稠密时，A 为某半群的生成算子的充要条件乃是(38.1)。

証明 由于 J_n 是 $(I-n^{-1}A)$ 的逆算子，(36.3)固然成立，同时(36.4)在此也成立。以下是它的証明。首先，当 $y\in\mathfrak{D}(A)$ 时 $y=J_ny-n^{-1}J_nAy$。从而

$$\|y-J_ny\|\leqslant n^{-1}(1-n^{-1}\beta)^{-1}\|A\cdot y\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

但因 $\mathfrak{D}(A)$ 在 X 内稠密，故对于任意的 $x\in X$ 以及任意的 $\varepsilon>0$，存在 $y\in\mathfrak{D}(A)$ 使 $\|x-y\|\leqslant\varepsilon$。因此

$$\begin{aligned}\|x-J_nx\|&\leqslant\|x-y\|+\|y-J_ny\|+\|J_ny-J_nx\|\\&\leqslant\varepsilon+\|y-J_ny\|+(1-n^{-1}\beta)^{-1}\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

由此知道必然 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}J_nx=x$.

其次，設

$$T_t^{(n)}=\exp(tAJ_n),$$

则由(38.1)知道(37.5)即 $\|T_t^{(n)}\|\leqslant\exp(\beta t/(1-n^{-1}\beta))$ 成立。今由(37.3)有

$$\frac{dT_t^{(n)}x}{dt}=AJ_nT_t^{(n)}x=T_t^{(n)}AJ_n\cdot x, \tag{38.2}$$

从而

$$T_t^{(n)}x-x=\int_0^t T_s^{(n)}AJ_n\cdot x ds. \tag{38.3}$$

但 J_n 与 J_m 显然可交换❶，因此 $AJ_n=n(J_n-I)$ 与 $T_t^{(m)}$ 也可交换，从而和前定理的証明一样，

$$\|T_t^{(m)}x-T_t^{(n)}x\|=\left\|\int_0^t\frac{d}{ds}\{\exp((t-s)AJ_n)\cdot T_s^{(m)}\cdot x\}ds\right\|$$

$$=\left\|\int_0^t\exp((t-s)AJ_n)\cdot T_s^{(m)}\cdot(AJ_m-AJ_n)x\,ds\right\|$$

$$\leqslant\int_0^t\exp\left(\frac{\beta(t-s)}{1-n^{-1}\beta}\right)\cdot\exp\left(\frac{\beta s}{1-m^{-1}\beta}\right)\|(J_m-J_n)Ax\|ds.$$

由于(36.4)成立，利用上式便知当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时，对于任意有限区間的 t 一致地有

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty}T_t^{(n)}x=T_tx \tag{38.4}$$

存在。但因 $\mathfrak{D}(A)$ 在 X 内稠密，故对于任意的 $y\in X$ 与任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 使 $\|y-x\|\leqslant\varepsilon$. 于是利用

$$\|T_t^{(n)}\|\leqslant\exp(\beta t/(1-n^{-1}\beta))$$

得

$$\|T_t^{(m)}y-T_t^{(n)}y\|\leqslant\|T_t^{(m)}y-T_t^{(m)}x\|+\|T_t^{(m)}x-T_t^{(n)}x\|+\|T_t^{(n)}x-T_t^{(n)}y\|$$

$$\leqslant\exp(\beta t/(1-m^{-1}\beta))\cdot\varepsilon+\|T_t^{(m)}x-T_t^{(n)}x\|$$

$$+\exp(\beta t/(1-n^{-1}\beta))\cdot\varepsilon,$$

---

❶ 一般，如 A 与 B 可交换而 A^{-1}, B^{-1} 存在，则 A^{-1} 与 B^{-1} 亦可交换。——譯者注

而由于(38.4)，对属于任意有限区間 $[0, t_0]$ 的 t 必一致地

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\|T_t^{(m)}y-T_t^{(n)}y\|\leqslant 2\exp(\beta t_0)\cdot\varepsilon.$$

鉴于 $\varepsilon>0$ 的任意性，便知結果对于任意的 $x\in X$，在任意有限区間上都一致地有(38.4)的成立。并且由共鳴定理6.2的系，

$$\|T_t\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_t^{(n)}\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\beta t}{1-n^{-1}\beta}\right)=\exp(\beta t).$$

現在只需指出 T_t 是以 A 为生成算子的半群好了。首先，由于 $T_t^{(n)}T_s^{(n)}=T_{t+s}^{(n)}$，而

$$\begin{aligned}&\|T_{t+s}\cdot x-T_tT_s\cdot x\|\\&\quad\leqslant\|T_{t+s}\cdot x-T_{t+s}^{(n)}\cdot x\|+\|T_{t+s}^{(n)}\cdot x-T_t^{(n)}T_s^{(n)}\cdot x\|\\&\qquad+\|T_t^{(n)}T_s^{(n)}\cdot x-T_t^{(n)}T_s\cdot x\|+\|T_t^{(n)}T_s\cdot x-T_tT_s\cdot x\|\\&\quad\leqslant\|T_{t+s}x-T_{t+s}^{(n)}\cdot x\|+\exp\left(\frac{\beta t}{1-n^{-1}\beta}\right)\|T_s^{(n)}\cdot x-T_s\cdot x\|\\&\qquad+\|(T_t^{(n)}-T_t)\cdot T_sx\|.\end{aligned}$$

右边当 $n\to\infty$ 时收斂于0，所以

$$T_tT_s\cdot x=T_{t+s}\cdot x.$$

从而 $\{T_t\}$ 满足半群的条件(i)，(iii)。$T_t^{(n)}\cdot x$ 显然关于 t 强連續，且(38.4)当 t 在任意一个有限区間中时一致地成立，所以 $T_t\cdot x$ 也关于 t 强連續，即 $\{T_t\}$ 也滿足(ii)。因此 $\{T_t\}$ 是半群。設这个半群的生成算子为 $\tilde{A}$，那么我們只要証明 $\tilde{A}=A$ 就可以了。

$\tilde{A}=A$ 的証明　当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时，

$$\begin{aligned}&\|T_sAx-T_s^{(n)}AJ_nx\|\\&\quad\leqslant\|T_sAx-T_s^{(n)}Ax\|+\|T_s^{(n)}Ax-T_s^{(n)}AJ_nx\|\\&\quad\leqslant\|(T_s-T_s^{(n)})Ax\|+\exp(\beta s/(1-n^{-1}\beta))\cdot\|Ax-J_nAx\|.\end{aligned}$$

它由(38.4)与(36.4)在 $0\leqslant s\leqslant t<\infty$ 一致地收斂于0．因此在(38.3)中令 $n\to\infty$ 得

$$T_tx-x=\int_0^tT_sAx\,ds.$$

从而当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时 $\text{s-}\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(T_t-I)x=Ax$ 成立。于是知道 $\tilde{A}$ 是 A 的延拓，即

$$\text{当 } x\in\mathfrak{D}(A) \text{ 时}, x\in\mathfrak{D}(\tilde{A}) \text{ 且 } \tilde{A}x=Ax.$$

这样一来，若 n 充分大，$(I-n^{-1}\tilde{A})$ 便既要将 $\mathfrak{D}(\tilde{A})$，又要将 $\mathfrak{D}(A)\subseteq\mathfrak{D}(\tilde{A})$ 一对一地分别映照到全体 X。因此必然 $\mathfrak{D}(\tilde{A})=\mathfrak{D}(A)$，从而 $\tilde{A}=A$。

§ 39 半群成为群的条件

满足

(i′) $\quad T_0=I,\quad T_tT_s=T_{t+s}\quad (-\infty<t,\ s<\infty)$,

(ii′) $\quad \text{s-}\lim_{t\to t_0} T_tx=T_{t_0}\cdot x\quad (x\in X;\ -\infty<t_0<\infty)$,

(iii′) $\quad \|T_t\|\leqslant e^{\beta|t|}\quad (\beta>0;\ -\infty<t<\infty)$

的从 X 到 X 内的綫性算子族 $\{T_t\}$ 称为 (Banach 空間 X 中的) 群。例如在 $C[-\infty,\infty]$ 中 $(T_tx)(s)=x(t+s)$ 便是一个群。群虽然相当于特殊的半群，但对它却有下面的定理成立。这定理在双曲型波动方程的积分上得到应用(§ 41)。

定理 8.7 从 Banach 空間 X 的稠密子空間 $\mathfrak{D}(A)$ 到 X 内的加法算子 A 是某一群的生成算子的充要条件为

$$\left.\begin{array}{l}\text{存在某个 } \beta>0, \text{ 当整数 } n \text{ 的絕对值 } |n|>\beta \text{ 时}\\ J_n=(I-n^{-1}A)^{-1} \text{ 为有界加法算子，且}\\ \|J_n\|\leqslant(1-|n^{-1}|\beta)^{-1}.\end{array}\right\}\quad (39.1)$$

証明 (必要性) $\hat{T}_t=T_{-t}$ 成一半群，它的生成算子 $\hat{A}$ 是由

$$\hat{A}x=\text{s-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(\hat{T}_h-I)x=\text{s-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_{-h}-I)x$$

定义的。要証明 $\hat{A}=-A$。事实上，設 $x\in\mathfrak{D}(A)$，并令 $x_h=h^{-1}(T_{-h}-I)x$，那么

$$\begin{aligned}\|T_hx_h-\hat{A}x\|&=\|T_h\cdot x_h-T_h\hat{A}x+T_h\hat{A}x-\hat{A}x\|\\&\leqslant\|T_h\|\|x_h-\hat{A}x\|+\|(T_h-I)\hat{A}x\|\end{aligned}$$

的右边当 $h\downarrow 0$ 时 $\to 0$. 从而当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时,

$$\hat{A}x=\text{s-}\lim_{h\downarrow 0} T_h\{h^{-1}(T_{-h}-I)\}x$$
$$=\text{s-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(I-T_h)x=-Ax.$$

同样可知当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时 $Ax=-\hat{A}x$, 从而 $\hat{A}=-A$.

于是由定理 8.3 便知(39.1)成立。

(充分性) 只需指出, 对于以 A 为生成算子的半群 $T_t=\exp(tA)$ 及以 $\hat{A}=-A$ 为生成算子的半群 $\hat{T}_t=\exp(t\hat{A})$, 有 $T_t\hat{T}_t=\hat{T}_tT_t=I\ (t>0)$ 即可。事实上,

$$T_tx=\text{s-}\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)}x=\text{s-}\lim_{n\to\infty}\exp\left(nt[(I-n^{-1}A)^{-1}-I]\right)x,$$
$$\hat{T}_sx=\text{s-}\lim_{n\to\infty}\hat{T}_s^{(n)}x=\text{s-}\lim_{n\to\infty}\exp\left(ns[(I+n^{-1}A)^{-1}-I]\right)x\text{❶},$$

而且

$$\|T_t\hat{T}_sx-T_t^{(n)}\hat{T}_s^{(n)}x\|$$
$$\leqslant\|T_t\hat{T}_sx-T_t^{(n)}\hat{T}_sx\|+\|T_t^{(n)}\hat{T}_sx-T_t^{(n)}\hat{T}_s^{(n)}x\|$$
$$\leqslant\|(T_t-T_t^{(n)})\hat{T}_sx\|+\|T_t^{(n)}\|\cdot\|(\hat{T}_s-\hat{T}_s^{(n)})x\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

同样 $\|\hat{T}_sT_tx-\hat{T}_s^{(n)}T_t^{(n)}x\|\to 0\ (n\to\infty)$. 但因

$$(I-n^{-1}A)^{-1}\quad\text{与}\quad(I+n^{-1}A)^{-1}$$

可交换, 故 $T_t^{(n)}$ 与 $\hat{T}_s^{(n)}$ 可交换, 从而由上述, T_t 与 $\hat{T}_s$ 可交换。于是 $\{T_t\hat{T}_t\}$ 成为半群, 并且由于❷

$$\text{s-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h\hat{T}_h-I)x$$
$$=\text{s-}\lim_{h\downarrow 0}\hat{T}_h\cdot h^{-1}(T_h-I)x+\text{s-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(\hat{T}_h-I)x$$
$$=Ax+(-Ax)=0,$$

$\{T_t\hat{T}_t\}$ 的生成算子成为 0. 故必 $T_t\hat{T}_t=\exp(t\cdot 0)=I$.

---

❶ 原书从此以下之 $\hat{T}_s$ 及 $\hat{T}_s^{(n)}$ 均作 $\hat{T}_t$ 及 $\hat{T}_t^{(n)}$, 已改正。——译者注

❷ 这里只証明了当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时 $\text{s-}\lim_{h\to 0} h(T_h\hat{T}_h-I)x=0$. 但由此已可証明当 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 时 $T_t\hat{T}_tx=x$, 但 $T_t\hat{T}_t$ 为有界算子, $\mathfrak{D}(A)$ 是稠密的, 因此 $T_t\hat{T}_t=I$.——校者注

第 9 章　发展方程的 Cauchy 問題

我們要考慮当在 Banach 空間 X 中給定加法算子 A 时，按初值条件

$$\text{s-}\lim_{t\downarrow 0} x_t = x$$

来解方程

$$D_t x_t = \text{s-}\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(x_{t+h} - x_t) = A x_t, \quad t \geqslant 0 \tag{*}$$

的問題。假如 A 是半群 $\{T_t\}$ 的生成算子的話，那么上述方程当"初始值" x 属于 $\mathfrak{D}(A)$ 时可以由

$$x_t = T_t x = \exp(tA)x$$

而得到解（定理 8.2）。

被称为**扩散方程**的抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (\Delta = \text{拉普拉斯算子}), \quad t \geqslant 0, \quad u(0) = u_0,$$

或者可以写成矩陣形式

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < \infty$$

的双曲型的**波动方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$u(0) = u_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(0) = v_0$$

都是形如 (*) 的**发展方程**的例子。因此，如能适当地确定 Δ 或者 $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ 的定义域，使得逆算子 $(I - n^{-1}\Delta)^{-1}$ 或者 $\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - |n|^{-1}\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1}$ 成为有界算子的話，那么它們将分别由**指数函数**

$$u = \exp(t\Delta) u_0$$

或

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

而得解（定理 8.6 或定理 8.7）。确定 Δ 或 $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ 的定义域归結到課給这些算子以"綫性边値条件"。也就是由于課給 Δ 或 $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ 以适当的边値条件

对其定义域加以限制使得定理 8.6 或定理 8.7 可以应用上去，这样一来，扩散方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$ 或波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u$ 的"初值問題"——Cauchy 問題就成为可解。在这意义上抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$ 或双曲型方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u$ 的初值問題便轉換成为形如 $u-n^{-1}\Delta u=f$ 的橢圓型方程的边值問題了。在 §40 及 §41 中将举例說明。

§40 扩散方程的 Cauchy 問題

設 R 为 m 維可定向(orientable)的 C^∞ 級的 Riemann 空間，并設其基本度量二次形式为

$$ds^2=g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j\,❶. \tag{40.1}$$

考虑以属于 $C^\infty(R)$ 的实函数为系数的二阶偏微分算子 A：

$$(Af)(x)=b^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}+a^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i},\quad b^{ij}(x)=b^{ji}(x). \tag{40.2}$$

我們知道，所謂 $(Af)(x)$ 的值与点 x 的局部坐标 $(x^1,x^2,\cdots,x^m)$ 的选取无关的条件乃是指在作坐标变换 $(x^1,x^2,\cdots,x^m)\to(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^m)$ 时，若 b, a 变成 $\bar{b}$, $\bar{a}$, 則

$$b^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}+a^i\frac{\partial f}{\partial x^i}=\bar{b}^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^j}+\bar{a}^i\frac{\partial f}{\partial\bar{x}^i}$$

成立。因此，利用

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial f}{\partial\bar{x}^k}\cdot\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial\bar{x}^s}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial\bar{x}^s}{\partial x^j}$$

便知上述条件和

$$\bar{b}^{ij}=b^{ks}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^s}, \tag{40.3}$$

---

❶ 以下遵从 Einstein 采用 $g_{ij}(x)dx^i dx^j=\sum_{i,j=1}^{m}g_{ij}(x)dx^i dx^j$ 等的記法。

$$\bar{a}^i = a^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} + b^{kr} \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^r} \tag{40.4}$$

等价。从而 $b^{ij}(x)$ 为二阶的逆变对称張量，又 $a^i(x)$ 是在坐标变换 $(x^1,\cdots,x^m)\to(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^m)$ 时服从变换法則 (40.4) 的量。

設 A 是这样的椭圓型微分算子：存在某个正数 λ 使

$$b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 \tag{40.5}$$

成立。我們考慮关于 R 的点 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 与时間 t 的函数 $u(t,x)$ 的抛物型方程連同初値条件：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) \quad (t\geqslant 0), \\ &u(0,x) = \text{給定函数 } f(x). \end{aligned}\right\} \tag{40.6}$$

这乃是对于 Riemann 空間上的一般的扩散方程的 Cauchy 問題。

为了說明如何利用半群的方法来解这个 Cauchy 問題，我們特别考虑 R 是象球面，椭球面或圓环面 (torus) 之类的紧致 Riemann 空間的情形。在 Riemann 空間 R 中，如果从 R 的任一无限点列 $\{x_{(n)}\}$ 中恒可选出收斂于 R 的 (内) 点的子列 $\{x_{(n')}\}$，則称 R 是紧致的。我們的結果可写成下面定理的形式。

定理9.1❶ 如果 R 是紧致的，那么 (40.6) 对于任意的 $f(x)\in C^\infty(R)$ 都有解 $u(t,x)$，当它看成 (t,x) 的函数时属于 C^∞，并且这解 $u(t,x)$ 可以表示成

$$u(t,x) = \int_R P(t,x,dy) f(y). \tag{40.7}$$

在此 $P(t,x,E)$，当 (t,x) 固定时，关于 R 上的 Borel 集合❷ E 是 σ 可加的：

---

❶ 参考 K. Yosida: On the integration of diffusion equations in Riemannian spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 864～873.

❷ 从 R 中的开集合出发做可列次求和集合、通集合、补集合等运算所得到的一切集合称做 R 中的 Borel 集合。

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } E_k \text{ 互不相交时，}\\ P\left(t, x, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(t, x, E_k),\end{array}\right\} \tag{40.8}$$

且滿足

$$P(t, x, E)\geqslant 0, \quad P(t, x, R)=1. \tag{40.9}$$

为了将这定理归結到定理 8.6 来証明，需有几个引理做准备。首先，定义在 R 上的实値連續函数 $f(x)$ 的全体按范数

$$\|f\|=\max_{x\in R}|f(x)|$$

构成 Banach 空間 $C(R)=C^0(R)$。設将 A 看成把属于 $C^\infty(R)\subseteqq C(R)$ 的函数 $f(x)$ 映照到 $(Af)(x)\in C^\infty(R)\subseteqq C(R)$ 的加法算子时，就把这个算子写作 A_0。

引理 1　若对于任意的正整数 n，令

$$f(x)-n^{-1}(A_0f)(x)=h(x),$$

则

$$\max_{x\in R} h(x)\geqslant f(x)\geqslant \min_{x\in R} h(x).$$

証明　設 $f(x)$ 在 R 的点 x_0 处达到最大值。由于 (40.3) 及 (40.5)，适当地采取在 x_0 处的局部坐标，可使

$$b^{ij}(x_0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

成立，这么一来就有

$$h(x_0)=f(x_0)-n^{-1}\left\{a^i(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0^i}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial (x_0^i)^2}\right\},$$

而由于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处成为极大值，必 $\{\ \ \}\leqslant 0$，从而 $h(x_0)\geqslant f(x_0)$。因此在一切的 $x\in R$ 有 $\max\limits_{x\in R} h(x)\geqslant f(x)$。同样也可証明在一切的 $x\in R$ 有 $f(x)\geqslant \min\limits_{x\in R} h(x)$。

系　当 $n>0$ 时，逆算子 $(I-n^{-1}A_0)^{-1}$ 存在且

$$\|(I-n^{-1}A_0)^{-1}\|\leqslant 1, \tag{40.10}$$

若 $h(x)\geqslant 0$, 則 $\{(I-n^{-1}A_0)^{-1}h\}(x)\geqslant 0$, (40.11)

$$(I-n^{-1}A_0)^{-1}\cdot 1=1 \tag{40.12}$$

成立。

証明 $(I-n^{-1}A_0)^{-1}$ 的存在由 $h(x)\equiv 0$ 蘊涵 $f(x)\equiv 0$ 的事实可以看出。

引理 2 所謂 A_0 的**最小閉延拓** (smallest closed extension) $\overline{A}_0$ 可以按照下面的方式来定义,卽当有适合条件

$$\text{s-}\lim_{k\to\infty} f_k=f, \quad \text{s-}\lim_{k\to\infty} A_0 f_k=h \tag{40.13}$$

的 $C^\infty(R)$ 中的点列 $\{f_k\}$ 及 $C(R)$ 中的点 f, h 存在时,便定义

$$\overline{A}_0 f=h. \tag{40.13'}$$

証明 只需指出 $\overline{A}_0 f$ 和定义 f 的函数列 $\{f_k\}$ 的取法无关而由 f 唯一地确定卽可。从而由于 A_0 的加法性又只需說明当有

$$\text{s-}\lim_{k\to\infty} g_k(x)=0, \quad \text{s-}\lim_{k\to\infty} A_0 g_k=e$$

的 $\{g_k\}\subseteq C^\infty(R)$ 及 $e\in C(R)$ 存在时,必然 $e=0$ 卽可。事实上,如果在 R 中利用

$$dx=\sqrt{g(x)}\,dx^1\,dx^2\cdots dx^m, \quad g(x)=\det(g_{ij}(x)) \tag{40.14}$$

引入和局部坐标的选取无关的体积元素,那么,由分部积分,象导出 (15.4) 一样,对于 f 及 $h\in C^\infty(R)$,

$$\int_R f(x)\,(A_0^*h)(x)\,dx=\int_R (A_0 f)(x)\cdot h(x)\,dx \tag{40.15}$$

成立,但

$$(A_0^*h)(x)=\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\left(\sqrt{g(x)}\,b^{ij}(x)h(x)\right)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g(x)}\,a^i(x)h(x)\right). \tag{40.16}$$

这是因为,R 既然是紧致的,境界 ∂R 为空集,所以分部积分时"被积出"的項成为 0。因此有

$$\int_R g_k(x)(A_0^* h)(x)dx = \int (A_0 g_k)(x)\cdot h(x)dx.$$

在这里令 $k\to\infty$ 得 $\int_R e(x)\cdot h(x)dx=0$，而鉴于 $h\in C^\infty(R)$ 的任意性，卽得 $e(x)\equiv 0$ 的結論。

引理 3 $n>0$ 时空間 $C^\infty(R)$ 通过 $(I-n^{-1}A_0)$ 所得的象，亦卽 $\mathfrak{B}(I-n^{-1}A_0)$，在 $C(R)$ 內是稠密的。

証明 将 $C^\infty(R)$ 中的全体函数 $f(x)$ 看做是按范数

$$\|f\|_k=\left(\sum_{|s|\leq k}\int_R |D^{(s)}f(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

所成的 pre-Hilbert 空間，設它的完备化为 $H_k(R)$。由于 R 是紧致的，$C^\infty(R)$ 与 $\mathfrak{D}^\infty(R)$ 同义，从而 $H_k(R)$ 与 $\widetilde{H}_k(R)$ 同义。

假如 $(I-n^{-1}A)u=0$ 有异于 0 的弱解 $u\in H_1(R)$ 的話，那么，利用 A 是二阶椭圓型算子的事实，由 Weyl-Schwartz 定理 4.3，u 不妨看做是属于 $C^\infty(R)$ 的函数，从而由引理 1 将有 $u(x)\equiv 0$。因此应用定理 4.5，对于任意的 $f\in C^\infty(R)\subseteq H_0(R)$，方程 $(I-n^{-1}A)u=f$ 必有属于 $H_1(R)$ 的弱解 u。于是再由 Weyl-Schwartz 定理，这个 u 不妨看做是属于 $C^\infty(R)$ 的函数。这就是說，对于任意的 $f\in C^\infty(R)$，$(I-n^{-1}A_0)u=f$ 总有属于 $C^\infty(R)$ 的解 u，利用 $C^\infty(R)$ 在 $C(R)=C^0(R)$ 內按一致收斂的意义稠密的事实(可仿 §11 例2 証明)，便知 $C^\infty(R)$ 的通过算子 $(I-n^{-1}A_0)$ 所得的象在 $C(R)$ 內确是稠密的。

系 当 $n>0$ 时，$(I-n^{-1}\overline{A}_0)$ 具有有界逆算子 $J_n=(I-n^{-1}\overline{A}_0)^{-1}$ 定义在全体 $C(R)$ 上，且

$$\|(I-n^{-1}\overline{A}_0)^{-1}\|\leqslant 1, \tag{40.10'}$$

$$\text{若 } h(x)\geqslant 0,\ \text{则}\{(I-n^{-1}\overline{A}_0)^{-1}h\}(x)\geqslant 0, \tag{40.11'}$$

$$(I-n^{-1}\overline{A}_0)^{-1}\cdot 1=1 \tag{40.12'}$$

成立。

証明 由引理 3, 对于任意的 $h\in C(R)$, 存在 $\{f_k\}\subseteqq C^\infty(R)$使

$$\text{s-}\lim_{k\to\infty}(I-n^{-1}A_0)f_k=h.$$

由 (40.10), 对于

$$f_k=(I-n^{-1}A_0)^{-1}h_k,\quad h_k=(I-n^{-1}A_0)f_k$$

有

$$\|f_k-f_l\|\leqslant\|(I-n^{-1}A_0)^{-1}\cdot(h_k-h_l)\|\leqslant\|h_k-h_l\|.$$

因此 $\lim\limits_{k,l\to\infty}\|f_k-f_l\|=0$. 而由于 $C(R)$ 的完备性,必存在

$$\text{s-}\lim_{k\to\infty}f_k=f.$$

于是根据 $\overline{A}_0$ 的定义,当 $k\to\infty$ 时得

$$h=\text{s-}\lim_{k\to\infty}h_k=\text{s-}\lim_{k\to\infty}(I-n^{-1}A_0)f_k=(I-n^{-1}\overline{A}_0)f,$$

而 $(I-n^{-1}\overline{A}_0)f=h$. 并且因为由(40.10)显然有

$$\|(I-n^{-1}\overline{A}_0)f\|\geqslant\|f\|,$$

故結果$(I-n^{-1}\overline{A}_0)^{-1}$也存在,而且 $\|(I-n^{-1}\overline{A}_0)^{-1}\|\leqslant1$. 这样一来,便証明了(40.10′)。至于(40.11′)及(40.12′)也可分别从(40.11),(40.12)过渡到极限而容易得証。

有了以上的准备之后,卽可进行

定理 9.1 的証明 由上面的系, $\overline{A}_0$ 成为某个半群 $\{T_t\}$ 的生成算子,因此当 $f\in\mathfrak{D}(\overline{A}_0)$ 时,

$$\text{s-}\lim_{h\to0}h^{-1}(T_{t+h}f-T_tf)=D_tT_tf=\overline{A}_0T_tf=T_t\overline{A}_0f,\quad(40.17)$$

$$\text{s-}\lim_{h\downarrow0}T_tf=f\qquad(40.18)$$

成立。可是当 $f\in C^\infty(R)=\mathfrak{D}(A_0)$ 时, 由于对一切正整数 k, $(A_0^kf)(x)$有定义而等于$(A^kf)(x)$, 故 $\overline{A}_0^kf\in\mathfrak{D}(\overline{A}_0)$ $(k=0,1,2,\cdots)$. 因此,由上式,当 $f\in C^\infty(R)$ 时,对一切正整数 k, $D_t^kT_tf$ 有定义而且

$$D_t^kT_tf=\overline{A}_0^kT_tf.$$

例如

$$D_t^2 T_t f = D_t(T_t \overline{A}_0 f) = \overline{A}_0 T_t \overline{A}_0 f = \overline{A}_0^2 T_t f.$$

于是不仅 $(T_t f)(x) = u(t, x)$ 当 t 固定时是 x 的連續函数，即使对一切的正整数 k，$\overline{A}_0^k u(t, x)$ 也是連續函数。由于 $u(t, x)$ 作为 x 的函数属于 $\mathfrak{D}(\overline{A}_0)$，存在 $\{u_k(x)\} \subseteq C^\infty(R)$ 使

$$\text{s-}\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(t, x),$$

$$\text{s-}\lim_{k\to\infty} (A_0 u_k)(x) = \overline{A}_0 u(t, x).$$

又由(40.15)得到

$$\int_R u_k(x)(A_0^* h)(x)\,dx = \int_R (A_0 u_k)(x) \cdot h(x)\,dx.$$

在上式中令 $k \to \infty$，即是

$$\int_R u(t, x)(A_0^* h)(x)\,dx = \int_R \overline{A}_0 u(t, x) \cdot h(x)\,dx,$$

$$h \in C^\infty(R).$$

反复这样做，便得

$$\int_R u(t, x)(A_0^{*k} h)(x)\,dx = \int_R \overline{A}_0^k u(t, x) \cdot h(x)\,dx,$$

$$h \in C^\infty(R).$$

于是对于 $k = 1, 2, \cdots$，$u(t, x)$ 乃是

$$A_0^k v(x) = \overline{A}_0^k u(t, x) \quad (= \text{关于 } x \text{ 的已知連續函数})$$

的弱解，因为 A_0^k 和 A_0 同时为椭圓型的❶，所以应用 Weyl-Schwartz 定理 (§ 15) ❷ 知道当 t 固定时，作为 x 的函数，

$$u(t, x) \in C^\infty(R).$$

于是由(40.17)得

---

❶ 并且 A_0^k 为 $2k$ 阶的椭圓型偏微分算子。

❷ 应該是定理 7.1 与定理 7.2 的結合。——譯者注

$$D_t^2u(t, x)=\overline{A}_0^2u(t, x)=A_0^2u(t, x),$$

而

$$(D_t^2+\overline{A}_0)^k u(t, x)=(A_0^2+A_0)^k u(t, x)\quad(k=1, 2, \cdots),$$

因此,和上面一样可知当 $t\in[0,\infty)$ 且 $x\in R$ 时, $u(t,x)$ 作为 (t,x) 的函数乃是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+A_0\right)^k v(t, x)=(A_0^2+A_0)^k v(t, x)$$

(=关于 (t, x) 的已知連續函数)

的弱解,因为再应用 Weyl-Schwartz 定理[1]知道

$$u(t,x)=(T_tf)(x)$$

作为 (t, x) 的函数属于 C^∞, 所以由(40.17),(40.18)便知 $u(t, x)$ 为(40.6)的解。

其次,由定理 8.6,

$$u(t, x)=(T_tf)(x)=\text{s-}\lim_{n\to\infty}\exp(tn(J_n-I))f(x),$$

在此 $J_n=(I-n^{-1}\overline{A}_0)^{-1}$. 但因

$$\exp(tn(J_n-I))=\exp(-nt)\exp(ntJ_n),$$

而且 J_n 满足 (40.10′)～(40.12′),故

$$\|\exp(tn(J_n-I))\|\leqslant 1,$$

若 $h(x)\geqslant 0$, 则 $\exp(tn(J_n-I))h(x)\geqslant 0$,

$$\exp(nt(J_n-I))\cdot 1=1$$

也满足,从而得

$$\|T_t\|\leqslant 1, \tag{40.10''}$$

若 $h(x)\geqslant 0$, 则 $(T_th)(x)\geqslant 0$, (40.11″)

$$T_t\cdot 1=1. \tag{40.12''}$$

因此,当固定 x 于 x_0 时,如果把 $u(x_0)=(T_tf)(x_0)$ 看做是 $f(y)\in$

[1] $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+A_0\right)^k$ 为关于 (t, x) 的 $2k$ 阶椭圆型偏微分算子(这里仍应是定理 7.1 与 7.2 的結合。——校者注)。

$C^\infty(R)$ 的加法泛函的話，得 $|u(x_0)|\leqslant\|T_t\|\cdot\|f\|\leqslant\|f\|$，从而該泛函是連續的，于是滿足 (40.7)，(40.8) 的 $P(t,x,E)$ 存在❶。这 P 滿足 (40.9)，由 (40.11′)及(40.12′) 可以看出❷。

§41 波动方程的 Cauchy 問題

設 E^m 为 m 維 Euclid 空間，考虑关于 E^m 中的点 $x=(x_1,\cdots,x_m)$与时間 t 的函数 $u(t,x)$ 的波动方程連同初值条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=Au(t,x)\quad(-\infty<t<\infty),\\&u(0,x)=\text{給定函数}\,f(x),\\&\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\text{給定函数}\,g(x),\end{aligned}\right\}\tag{41.1}$$

此地 A 是以 $C^\infty(E^m)$ 中的函数 $b^{ij}(x)=b^{ji}(x)$，$a^i(x)$，$c(x)$ 为系数的椭圓型算子：

$$A=b^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+a^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x).\tag{41.2}$$

对于如上的 Cauchy 問題可証明下面的定理。

定理 9.2 設 $b^{ij}(x)$，$a^i(x)$，$c(x)$ 滿足以下的条件：

$$\left.\begin{aligned}&b^{ij}(x),\ a^i(x),\ c(x),\ \frac{\partial^2 b^{ij}}{\partial x_k\partial x_s},\ \frac{\partial b^{ij}}{\partial x_k},\ \frac{\partial a^i}{\partial x_s}\\&\text{都在 } E^m \text{ 上有界}\end{aligned}\right\}\tag{41.3}$$

存在正数 λ, μ，使在 E^m 上到处有

❶ 这里利用了下面的事实（它是关于共軛空間 $C[0,1]^*$ 的表示定理（見第5章 §19）的一种推广）：設 $C(\Omega)$ 为可分紧 T_2 型空間 Ω 上連續函数的全体所成的 Banach 空間（$\|x(t)\|=\max|x(t)|$），則每一 $f\in C(\Omega)^*$ 可表示成 $f(x)=\int_\Omega x(t)\varphi(dt)$，$x\in C(\Omega)$，在此 φ 表示一个定义在 Ω 上所有 Borel 集上的全可加測度。——譯者注

❷ 又关于一維扩散方程，E. Hille 及 W. Feller 应用半群理論作了深入研究。在本丛书中伊藤清著《随机过程》一书里也許会涉及这問題。

$$\mu\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2 \geqslant b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2, \tag{41.4}$$

这时必存在正数 α_0, β, 使以下的事实成立, 卽如果 $f(x)$, $g(x)\in C^\infty(E^m)$ 且

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于 } k=0,1,2,\cdots,(A^kf)(x),(A^kg)(x) \text{ 以及它} \\ \text{們的一阶偏导数全都属于 } H_0(E^m)=L_2(E^m)\end{array}\right\} \tag{41.5}$$

的話❶, 則必有(41.1)的解 $u(t,x)$, 看成关于 (t, x) 的函数时属于 C^∞, 并且满足下面的条件:

$$\begin{aligned}&((u-\alpha_0Au,\ u)_0+\alpha_0(u_t,\ u_t)_0)^{1/2}\\ &\qquad\leqslant\exp(\beta|t|)((f-\alpha_0Af,\ f)_0+\alpha_0(g,\ g)_0)^{1/2},\end{aligned} \tag{41.6}$$

但

$$(f,\ g)_0=\int_{E^m}f(x)g(x)dx,\quad dx=dx_1\cdots dx_m,\quad \|f\|_0=(f,\ f)^{1/2}. \tag{41.7}$$

为了証明这定理, 我們引入三个引理作准备。

引理 1 設以 $H(E^m)$ 表示 $C^\infty(E^m)$ 中的函数 $f(x)$ 同时满足

$$\|f\|_1=\left(\int_{E^m}|f|^2dx+\int_{E^m}\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{1/2}<\infty \tag{41.8}$$

的 f 的全体, 那么 $H(E^m)$ 按范数 $\|\ \|_0$, $\|\ \|_1$ 的完备化分别为 $H_0(E^m)=\widetilde{H}_0(E^m)$, $H_1(E^m)=\widetilde{H}_1(E^m)$, 并且

$$\left.\begin{array}{c}\text{当 } f,\ g\in H(E^m) \text{ 且 } Af\in H_0(E^m) \text{ 时,}\\ (Af,\ g)_0=-\displaystyle\int_{E^m}b^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}dx-\int_{E^m}\frac{\partial b^{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}g\,dx\\ +\displaystyle\int_{E^m}a^i\frac{\partial f}{\partial x_i}g\,dx+\int_{E^m}cfg\,dx,\end{array}\right\} \tag{41.9}$$

---

❶ 例如, 当 $f\in\mathfrak{D}^\infty(E^m)$, $g\in\mathfrak{D}^\infty(E^m)$ 时, (41.5)这条件确实是满足的。

$$\left.\begin{array}{c}\text{当 } f,\ g\in H(E^m) \text{ 且 } A^*f\in H_0(E^m) \text{ 时[1]},\\ (A^*f,g)_0=-\int_{E^m} b^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\,dx-\int_{E^m}\frac{\partial b^{ij}}{\partial x_i}f\frac{\partial g}{\partial x_j}\,dx\\ -\int_{E^m}\frac{\partial a^i f}{\partial x_i}\cdot g\,dx+\int_{E^m} cfg\,dx\end{array}\right\}\quad(41.10)$$

成立。

証明 对 $(Af,g)_0$ 施行分部积分并利用(41.3)便可得(41.9)。这是因为，由于 $f,\ g\in H(E^m)$ 及 $Af\in H_0(E^m)$ 的假定在施行分部积分时"被积出的项"在 $x=\infty,\ -\infty$ 成为 0 的緣故，詳見著者的論文[2]。同样可得 (41.10)。

系 (Gårding 式不等式) 如果适当地取 $\gamma,\ \delta>0$，那么对于充分小的正数 α_0，

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } f\in H(E^m) \text{ 且 } Af\in H_0(E^m) \text{ 时},\\ \delta\|f\|_1^2\leqslant(f-\alpha_0 Af,\ f)_0\leqslant(1+\alpha_0\gamma)\|f\|_1^2,\end{array}\right\}\quad(41.11)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } f\in H(E^m) \text{ 且 } A^*f\in H_0(E^m) \text{ 时},\\ \delta\|f\|_1^2\leqslant(f-\alpha_0 A^*f,\ f)_0\leqslant(1+\alpha_0\gamma)\|f\|_1^2,\end{array}\right\}\quad(41.12)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } f,\ g\in H(E^m) \text{ 且 } Af,\ Ag\in H_0(E^m) \text{ 时},\\ |(Af,\ g)_0-(f,\ Ag)_0|\leqslant\gamma\|f\|_1\cdot\|g\|_0.\end{array}\right\}\quad(41.13)$$

証明 要得出 (41.11)～(41.12)，只需用 (41.3)～(41.4)，(41.9)～(41.10) 及不等式

$$\alpha_0|ab|\leqslant\alpha_0(\varepsilon|a|^2+\varepsilon^{-1}|b|^2)\quad(\alpha,\ \varepsilon>0),$$

并注意到 $f,\ g\in H_1(E^m)$，而应用 Schwarz 不等式卽可。

同样，要得出(41.13)，只需将 $(f,Ag)_0$ 写成(41.10)的形式，通过一次分部积分将 $\frac{\partial g}{\partial x_j}\cdot f$ 这样的項换成 $\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot g$，再与 (41.9) 作差

---

[1] $A^*f=\frac{\partial^2(b^{ij}f)}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial(a^if)}{\partial x_i}+cf$.

[2] 数学：8，2 号 (1956)，66～68，

$$(Af,\ g)_0-(f,\ Ag)_0=-\int_{E^m}\Big(2\frac{\partial b^{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g+\frac{\partial^2 b^{ij}}{\partial x_i\partial x_j}fg$$

$$-2a^i\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g-\frac{\partial a^i}{\partial x_i}fg\Big)dx,$$

最后再按和証明(41.11)同样的論法来估値就可以了。

引理 2　設正数 α_0 已取得充分小，使对于适合 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 的 α，上面的系成立。这时对于任意的 $f\in H(E^m)$，

$$u-\alpha Au=f \tag{41.14}$$

有唯一的属于 $H(E^m)$ 的解 $u=u_f$。

証明　設 $u,\ v\in H(E^m)$ 且 $A^*u\in H_0(E^m)$，对于这样的 $u,\ v$，考虑

$$\hat{B}(u,\ v)=(u-\alpha A^*u,\ v)_0,$$

那么，由于(41.12)，(41.13)，

$$|\hat{B}(u,\ v)|\leqslant(1+\alpha\gamma)\|u\|_1\cdot\|v\|_1,\quad \delta\|u\|_1^2\leqslant\hat{B}(u,\ u)$$

成立。如上的 $u,\ v$ 在 $H_1(E^m)$ 内按 $\|\ \|_1$ 的意义是稠密的，这由 $\mathfrak{D}^\infty(E^m)$ 在 $H_1(E^m)$ 内按 $\|\ \|_1$ 的意义已是稠密的事实可知。因此，和 § 16 里一样过度到极限，$\hat{B}$ 便可延拓为 B 使对于 $H_1(E^m)$ 中的 $u,\ v$ 都有定义，而且满足

$$|B(u,\ v)|\leqslant(1+\alpha\gamma)\|u\|_1\cdot\|v\|_1,\quad \delta\|u\|_1^2\leqslant B(u,\ u).$$

于是和 § 16 里完全一样，可知对于任意的 $f\in H_0(E^m)$，满足(41.14)的弱解 $u=u_f\in H_1(E^m)$唯一地存在。因为由 Weyl-Schwartz 定理，当 $f\in C^\infty(R)$ 时 u_f 也可看做是属于 $C^\infty(R)$ 的，所以引理 2 得証。

引理 3　設整数 n 的絕对値的倒数 $|n|^{-1}$ 充分小，这时对于 $H(E^m)$ 的任意的矢量偶 $\{f,\ g\}$，

$$\left[\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}-n^{-1}\begin{pmatrix} 0 & I\\ A & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix} \tag{41.15}$$

在 $H(E^m)$的矢量偶$\{u,\ v\}$中是可解的。但若更有 $Af\in H_0(E^m)$，

則这种解滿足

$$((u-\alpha_0 Au,\ u)_0+\alpha_0(v,\ v)_0)^{1/2}$$
$$\leqslant(1+|n|^{-1}\beta)((f-\alpha_0 Af,\ f)_0+\alpha_0(g,\ g)_0)^{1/2}. \quad (41.16)$$

于此正数 β 为与 f, g 或 n 无关的常数。

証明　設 $u_1\in H(E^m)$, $v_2\in H(E^m)$ 分别为根据前引理所得的

$$u_1-n^{-2}Au_1=f,\quad v_2-n^{-2}Av_2=g$$

的解，那么容易知道

$$u=u_1+n^{-1}v_2,\quad v=v_2+n^{-1}Au_1$$

滿足(41.15)，亦即

$$u-n^{-1}v=f,\quad v-n^{-1}Au=g. \quad (41.15')$$

其次，更設 $Af\in H_0(E^m)$. 由(41.15')及 f, g, u, $v\in H(E^m)$ 得

$$Au=n(v-g)\in H(E^m)\subseteqq H_0(E^m).$$

由此及 $Af\in H_0(E^m)$ 又得

$$Av=n(Au-Af)\in H_0(E^m),$$

从而对于 u, v 可应用引理的系，即由(41.15')得

$$\begin{aligned}(f-\alpha_0 Af,\ f)_0&=(u-n^{-1}v-\alpha_0 A(u-n^{-1}v),\ u-n^{-1}v)_0\\&=(u-\alpha_0 Au,\ u)_0-2n^{-1}(u,\ v)_0+n^{-1}\alpha_0(Au,\ v)\\&\quad+n^{-1}\alpha_0(Av,\ u)_0+n^{-2}(v-\alpha_0 Av,\ v)_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_0(g,\ g)&=\alpha_0(v-n^{-1}Au,\ v-n^{-1}Au)_0\\&=\alpha_0(v,\ v)_0-n^{-1}\alpha_0(v,\ Au)_0\\&\quad-n^{-1}\alpha_0(Au,\ v)_0+n^{-2}\alpha_0(Au,\ Au)_0,\end{aligned}$$

而因 $n^{-2}(v-\alpha_0 Av,\ v)_0\geqslant n^{-2}\delta\|v\|_1^2\geqslant 0$, $n^{-2}(Au,\ Au)_0\geqslant 0$, 故知当 $|n|^{-1}$ 充分小时，对于某正数 β,

$$(f-\alpha_0 Af,\ f)_0+\alpha_0(g,\ g)_0$$
$$\geqslant(u-\alpha_0 Au,\ u)_0+\alpha_0(v,\ v)_0$$

$$
\begin{aligned}
&-2|n|^{-1}|(Av, u)_0-(Au, v)_0| \\
\geqslant &(u-\alpha_0 Au, u)_0+\alpha_0(v, v)_0 \\
&-|n|^{-1}(\|v\|_0^2+\|u\|_1^2) \\
&-\alpha_0\gamma\cdot 2^{-1}|n|^{-1}(\|u\|_1^2+\|v\|_0^2) \\
\geqslant &(1+\beta|n|^{-1})^{-2}((u-\alpha_0 Au, u)_0 \\
&+\alpha_0(v, v)_0)
\end{aligned}
$$

成立。

这样就說明了(41.16)。从此式又知当 $f=g=0$ 时必 $u=v=0$，从而可看出解 $\{u, v\}$ 的唯一性。

系 設將 $H(E^m)$ 的矢量偶 $\{u, v\}$ 表示成

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

的形式，把它們按范数

$$\left\|\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\|=((u-\alpha_0 Au, u)_0+\alpha_0(v, v)_0)^{1/2}$$

作成賦范空間，并將該賦范空間完备化后所得的 Banach 空間記为 $H_1(E^m)\otimes H_0(E^m)$。如果以所有 $u, v\in H(E^m)$ 且 $Au, Av\in H_0(E^m)$ 这样的 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\in H_1(E^m)\otimes H_0(E^m)$ 作为

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

的定义域 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$，那么由引理 3 可知，对于 $|n|$ 充分大的整数 n，$\mathfrak{A}$ 的最小閉延拓 $\overline{\mathfrak{A}}$ 具有定义在全体 $H_1(E^m)\otimes H_0(E^m)$ 上的逆算子

$$(\mathfrak{I}-n^{-1}\overline{\mathfrak{A}})^{-1}=\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}-n^{-1}\overline{\mathfrak{A}}\right)^{-1},$$

而且成立着

$$\|(\mathfrak{I}-n^{-1}\overline{\mathfrak{A}})^{-1}\|\leqslant(1+\beta|n|^{-1}).$$

証明只需和前节引理 3 的系的証明同样来作就可以了。

定理 9.2 的証明 由于上面的系成立，故可应用定理 8.7 而知以 $\bar{\mathfrak{A}}$ 为生成算子的群 $\{T_t\}$ 存在而且 $\|T_t\|\leqslant\exp(\beta|t|)$。因此，只需証明

$$\begin{pmatrix} u(t,\ x) \\ v(t,\ x) \end{pmatrix}=T_t\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

作为 (t, x) 的函数属于 C^∞ 且为和 (41.1) 等价的

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u(t,\ x) \\ v(t,\ x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t,\ x) \\ v(t,\ x) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u(0,\ x) \\ v(0,\ x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

的解卽可。为此只需注意 A 为椭圓型的事实，应用 Weyl-Schwartz 定理，象証明定理 9.1 那样来作好了。詳見前举的著者論文。

注 在抛物型方程 (40.6) 或双曲型方程 (41.1) 的右边的 A 显含时間 t 的情形，不能原封不动地应用半群或群的理論。对这种"右边的算子 $A(t)$ 是随着时間而变化的发展方程"的 Cauchy 問題：

$$D_t u=A(t)u, \quad u(0)=\text{給定的}f,$$

用算子論的方法来处理的一般理論有加藤敏夫的卓越研究 T. Kato: On linear differential equations in Banach spaces, Comm. on pure and applied Math., **9** (1956), 479～486. 还有 K. Yosida: Integration of temporally inhomogeneous diffusion equations, Proc. Jap. Acad., **30** (1954), 19～23, 273～275. An operator-theoretical integration of temporally inhomogeneous wave equations, J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo, Sect., **1**, **7** (1957), 463～466.

第10章　抽象的积分方程式論
(Riesz-Schauder 理論)

設核 $K(x, y)$ 及 $f(x)$ 为已知的連續函数，解含参数 λ 的积分方程

$$\text{(i)} \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

而求未知函数 $\varphi(x)$ 乃是联系着場位論中的 Dirichlet 及 Neumann 問題而提出的古典的問題(参照 § 16)。I. Fredholm 曾將它象下面这样作为联立一次方程的极限来解决。将区間 $[a, b]$ 分成 $(n-1)$ 等分，設其分点为 $a=s_1, s_2, \cdots, s_n=b$，作为(i)的近似方程让我們来考慮

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} \varphi(s_i) - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\varphi(s_j)\delta = f(s_i) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \\ (\text{但 } k_{ij} = K(s_i, s_j),\ \delta = (n-1)^{-1}(b-a)). \end{cases}$$

如果这联立一次方程的系数所作的行列式

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\delta\, k_{11} & -\lambda\delta\, k_{12} & \cdots & \cdots \\ -\lambda\delta\, k_{21} & 1-\lambda\delta\, k_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\delta\, k_{n1} & \cdots & \cdots & 1-\lambda\delta\, k_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \lambda\delta \sum_{j=1}^{n} k_{jj} + \frac{1}{2!}\lambda^2\delta^2 \sum_{i,j=1}^{n} \begin{vmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{vmatrix} - \cdots$$

不为 0 的話，則(ii)可解而有

$$\varphi(s_i) = D_n(\lambda)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} D_n(s_i, s_j) f(s_j)\delta.$$

此地 $D_n(s_i, s_j)$ 为 $D_n(\lambda)$ 中对于含 k_{ij} 的項的余因子(cofactor)。作出上面的解，取当 $n\to\infty$ 时的极限用来作为 (i) 的解，根据这一

想法，Fredholm 完全解决了 (i) 的求解問題，包括 $D_n(\lambda)=0$ 的情况在内。

当看到了 Fredholm 的論文以后，Hilbert 曾作如下的考虑，即設$\{\varphi_i(x)\}$为 $L_2(a, b)$中的完全就范正交系，且 $\varphi(x)$，$K(x, y)$ 及$f(x)$关于$\{\varphi_i(x)\}$的 Fourier 展开式分别为

$$\varphi(x)\sim\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(x),$$

$$K(x, y)\sim\sum_{i,j=1}^{\infty}k_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y),$$

$$f(x)\sim\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i(x),$$

将它們代入方程(i)并比較两边 $\varphi_i(x)$ 的系数，就得到关于未知数 $c_i(i=1, 2, \cdots)$的无限联立一次方程組

$$\text{(iii)}\qquad c_i-\lambda\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}c_j=f_i\quad(i=1, 2, \cdots).$$

无論是既知的 k_{ij}, f_i 或未知的 c_i，由于它們是 Fourier 系数，满足

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|k_{ij}|^2<\infty,\quad\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2<\infty,\quad\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2<\infty,$$

即矢量 $f=(f_1, f_2, \cdots)$ 及矢量 $c=(c_1, c_2, \cdots)$ 并皆属于 (l_2). 因为由 Schwarz 不等式有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}c_j\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|^2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2\right\}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2\cdot\sum_{i,j=1}^{\infty}|k_{ij}|^2<\infty,$$

所以由

$$c=(c_1, c_2, \cdots)\to K\cdot c=\left(\sum_{j=1}^{\infty}k_{1j}c_j, \sum_{j=1}^{\infty}k_{2j}c_j, \cdots\right)$$

定义了从(l_2)到(l_2)内的有界加法算子 K. 因此，解(iii)与解(l_2)内的方程

(iii′) $c-\lambda Kc=f$

而求矢量 c 是等价的。这样一来，就开始有了 Hilbert 空間($=(l_2)$)及其中的有界加法算子的理論。

可是站在算子論的立場，不必导入坐标系 $\{\varphi_i(x)\}$，直接由

(iv) $$\varphi(x)\to K\varphi(x)=\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

定义从属于核 $K(x,y)$ 的算子 K 而归結到解函数空間內的方程

(i′) $\varphi-\lambda K\varphi=f$

来求矢量 φ 的問題，这样来考虑也未尝不可。算子 K 既可以是把 $C[a,b]$ 映照到 $C[a,b]$ 內的，也可以是把 $L_2(a,b)$ 映照到 $L_2(a,b)$ 內的。这就是說，只需处理給了 Banach 空間 X 中的有界加法算子 K 与 $f\in X$ 后如何来解含参数的方程(i′)而求 $\varphi\in X$ 的这种一般的問題就可以了。再者，即令 K 不是由連續核 $K(x,y)$ 如象(iv)那样給出的积分算子，而正如 F. Riesz[1]和 J. Schauder[2]所指出的，只要假定 K 具有当它为积分算子情形所导出的"K 的全連續性"的話，所有 Fredholm 关于(i)所得的各个結果都可原封不动地推广到(i′)的情形。

在本讲义里，我們将依照 Люстерник 和 Соболев[3]，闡明当 X 是象 $L_2(a,b)$ 或 $C[a,b]$ 那样"具有基底的 Banach 空間"时，(i′)可归結到有限联立方程組，就这样来叙述对于有基底的 Banach 空間的 Riesz 理論經过 Schauder 补充后的形式。

§42 全連續算子

全連續性 从 Banach 空間 X 到 Banach 空間 X_1 內的加法

---

[1] Über lineare Funktionalgleichungen, Acta. Math., 41 (1917), 71~98.

[2] Über lineare vollstetige Funktionaloperationen, Stud. Math., 2 (1930), 183~196.

[3] 刘斯切尔尼克，索伯列夫著：泛函分析概要(有中文本)。

算子 K，当它满足如下的条件时称为**全連續**的：

$$\left.\begin{array}{l}X\text{ 的任一有界点列 }\{x_n\}\text{，即 }X\text{ 中的使 }\{\|x_n\|\}\text{ 为}\\ \text{有界数列的这种点列 }\{x_n\}\text{，經过算子 }K\text{ 作用后的}\\ \text{映象 }\{Kx_n\}\text{ 含有在 }X_1\text{ 中强收斂的子列。}\end{array}\right\}$$

由于强收斂点列的范数是有界的，故全連續的加法算子一定是有界算子，但有界加法算子却不一定是全連續的。$L_2(a, b)$ 及 $C(a, b)$中的恒等算子便是这样的反例。

全連續算子的例1　如果 $K(x, y)$ 在 $-\infty<a\leqslant x, y\leqslant b<\infty$ 上連續，那么把 $C[a, b]$映照到 $C[a, b]$的积分算子是全連續的。

証明　令 $K\varphi(x)=\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy=\psi(x)$，則由 Schwarz 不等式

$$|\psi(x)|^2\leqslant\int_a^b|K(x, y)|^2dy\cdot\int_a^b|\varphi(y)|^2dy,$$

$$|\psi(x_1)-\psi(x_2)|^2$$
$$\leqslant\int_a^b|K(x_1, y)-K(x_2, y)|^2dy\cdot\int_a^b|\varphi(y)|^2dy.$$

从而当 $\|\varphi_n\|=\sup\limits_x|\varphi_n(x)|$ 有界时，$\psi_n(x)=K\varphi_n(x)$ **等度有界**：

$$\sup_{x, n}|\psi_n(x)|<\infty,$$

且**等度一致連續**：

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{|x_1-x_2|<\delta, n}|\psi_n(x_1)-\psi_n(x_2)|=0.$$

因此由定理 6.5，有适当的子列 $\{\psi_{n'}(x)\}$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收斂。

全連續算子的例2　如果 $K(x, y)$ 在 $-\infty<a\leqslant x, y\leqslant b<\infty$ 上可測，且

$$\int_a^b\int_a^b|K(x, y)|^2dx\,dy<\infty, \tag{42.1}$$

那么，把 $L_2(a, b)$映照到 $L_2(a, b)$的积分算子是全連續的。

証明　按 Lebesgue 积分的定义，存在連續函数列$\{K_n(x,y)\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\int_a^b|K(x, y)-K_n(x, y)|^2dx\,dy=0$。因为 $C[a, b]$ 中

的强收斂导致 $L_2(a, b)$ 中的强收斂，故由例 1 用核 $K_n(x, y)$ 所定义的积分算子 K_n 是全連續的。再由 Schwarz 不等式与 Fubini-Tonelli 定理有

$$\|(K-K_n)\varphi\|^2=\int_a^b\left|\int_a^b (K(x, y)-K_n(x, y))\varphi(y)dy\right|^2 dx$$

$$\leqslant\|\varphi\|^2\cdot\int_a^b\int_a^b |K(x, y)-K_n(x, y)|^2 dx\, dy,$$

于是 $\lim_{n\to\infty}\|K-K_n\|=0$。現在来証 K 的全連續性。設 $\{\|\varphi_n\|\}$ 为有界数列。由于每个算子 K_m 的全連續性，利用对角綫方法可选出 $\{\varphi_n\}$ 的子列 $\{\varphi_{n'}\}$，使得

$$\text{s-}\lim_{n'\to\infty} K_m\varphi_{n'} \qquad (m=1, 2, \cdots)$$

存在，但对于任意的 $\varepsilon>0$，

$$\|K\varphi_{n'}-K\varphi_{j'}\|\leqslant\|K\varphi_{n'}-K_m\varphi_{n'}\|+\|K_m\varphi_{n'}-K_m\varphi_{j'}\|$$

$$+\|K_m\varphi_{j'}-K\varphi_{j'}\|$$

$$\leqslant\|K-K_m\|\cdot\|\varphi_{n'}\|+\|K_m\varphi_{n'}-K_m\varphi_{j'}\|$$

$$+\|K_m-K\|\cdot\|\varphi_{j'}\|.$$

上式右边第 1 項及第 3 項，由于 $\{\|\varphi_n\|\}$ 有界与 $\lim_{m\to\infty}\|K-K_m\|=0$，对于充分大的 m 来說 $\leqslant\varepsilon$。又当固定 m 时，右边第 2 項对于充分大的 n', j'，也 $\leqslant\varepsilon$。因此对于充分大的 n', j'，$\|K\varphi_{n'}-K\varphi_{j'}\|\leqslant 3\varepsilon$。

全連續算子的例 3[1] 設 R 为 E^n 的有界域，如果从 Hilbert 空間 $H_k(R)$ $(k\geqslant 1)$ 到 $H_k(R)$ 内的加法算子 K 滿足下面的条件，即

对于 $j<k$，$\|K\varphi\|_k\leqslant C\|\varphi\|_j$ $(C=\text{常数},\ \varphi\in H_k(R))$，(42.2)

則 K 为全連續[2]。

証明(第 1 段) 設 $\mathfrak{D}^\infty(R)$ 中的函数列 $\{\varphi_\nu(x)\}$ 滿足 $\|\varphi_\nu\|_k\leqslant 1$

---

[1] 这里用了在 §16 与此例相当的事实。

[2] 如果 K 滿足(42.2)，則由(16.7)，K 作为 $H_k(R)$ 的算子是有界的。

$(\nu=1, 2, \cdots)$。考虑 φ_ν 的 Fourier 变換

$$\Phi_\nu(\xi)=\mathfrak{F}\varphi_\nu(\xi)=\int_R \varphi_\nu(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot\xi)dx$$

$$\left(x\cdot\xi=\sum_{j=1}^n x_j\xi_j\right).$$

由 Schwarz 不等式有

$$|\Phi_\nu(\xi)|^2\leqslant\int_R|\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot\xi)|^2dx\cdot\int_R|\varphi_\nu(x)|^2dx$$

$$\leqslant\int_R dx\cdot\|\varphi_\nu\|_0^2\leqslant\int_R dx\cdot\|\varphi_\nu\|_k^2\leqslant\int_R dx,$$

故函数列 $\{\Phi_\nu(\xi)\}$ 在 E^n 上有界。又因 $\{\|\varphi_\nu\|_0\}$ 有界，故应用定理 6.4，必可选出弱收斂的子列 $\{\varphi_{\nu'}\}$。但对于每个 ξ，$\exp(-2\pi\cdot\sqrt{-1}x\cdot\xi)$ 看成 x 的函数时属于 $H_0(R)$，故

$$\left.\begin{array}{l}\text{有界函数列 } \Phi_{\nu'}(\xi)=\int_R \varphi_{\nu'}(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot\xi)dx \\ \text{对于一切的 } \xi \text{ 都收斂，}\end{array}\right\} \tag{42.3}$$

于是利用(42.2)及(17.2)，(17.7)得

$$\|K\varphi_{\nu'}-K\varphi_{\mu'}\|_k^2=\|K(\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'})\|_k^2\leqslant C\|\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'}\|_j^2$$

$$=C\sum_{|p|\leqslant j}\|D^{(p)}(\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'})\|_0^2\quad(D^{(p)}=\partial^{p_1+\cdots+p_n}/\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n})$$

$$=C\sum_{|p|\leqslant j}\|\mathfrak{F}D^{(p)}(\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'})\|_0^2$$

$$=C\sum_{|p|\leqslant j}\left\|\prod_{l=1}^n(2\pi\sqrt{-1}\xi_l)^{p_l}\mathfrak{F}(\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'})(\xi)\right\|_0^2$$

$$=C\sum_{|p|\leqslant j}\int_{E^n}\left|\prod_{l=1}^n(2\pi\sqrt{-1}\xi_l)^{p_l}(\Phi_{\nu'}(\xi)-\Phi_{\mu'}(\xi))\right|^2d\xi.$$

对于充分大的正数 r，必有正数 c_1 使得上式

$$\leqslant C\sum_{|p|\leqslant j}\int_{|\xi|\leqslant r}\left|\prod_{l=1}^n(2\pi\sqrt{-1}\xi_l)^{p_l}(\Phi_{\nu'}(\xi)-\Phi_{\mu'}(\xi)\right|^2d\xi$$

$$+Cc_1\int_{|\xi|>r}|\xi|^{2j}|\Phi_{\nu'}(\xi)-\Phi_{\mu'}(\xi)|^2d\xi.$$

右边第1項，由于(42.3)，当 $\nu'\to\infty$，$\mu'\to\infty$ 时 $\to0$。又利用

(17.2) 及 (17.7)，必有正数 c_2 使得右边第 2 項

$$\leqslant Cc_1 r^{2j-2k}\int_{|\xi|>r}|\xi|^{2k}|\Phi_{\nu'}(\xi)-\Phi_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leqslant Cc_1 r^{2j-2k}\int_{E^n}|\xi|^{2k}|\Phi_{\nu'}(\xi)-\Phi_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leqslant Cc_1c_2 r^{2j-2k}\sum_{|j|\leqslant k}\|\mathfrak{F}D^{(j)}(\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'})(x)\|_0^2$$

$$= Cc_1c_2 r^{2j-2k}\sum_{|j|\leqslant k}\|D^{(j)}(\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'})(x)\|_0^2$$

$$\leqslant Cc_1c_2 r^{2j-2k}\|\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'}\|_k^2\leqslant 4Cc_1c_2 r^{2j-2k}.$$

由于 $j<k$，当 $r\to\infty$ 时它收斂于 0．結果便說明了 $\lim\limits_{\nu',\mu'\to\infty}\|K\varphi_{\nu'}-K\varphi_{\mu'}\|_k=0$．

（第 2 段） 設 $H_k(R)$ 中的函数列 $\{\tilde{\varphi}_\nu(x)\}$ 滿足 $\|\tilde{\varphi}_\nu(x)\|_k\leqslant 1$ $(\nu=1,2,\cdots)$．对于每个 $\tilde{\varphi}_\nu$，选取 $\varphi_\nu\in\mathfrak{D}^\infty(R)$ 使 $\|\tilde{\varphi}_\nu-\varphi_\nu\|_k\leqslant\nu^{-1}$．由于 $\|\varphi_\nu\|_k\leqslant\|\tilde{\varphi}_\nu\|_k+\nu^{-1}\leqslant 1+\nu^{-1}\leqslant 2$，和第 1 段一样，有适当的子列 $\{\varphi_{\nu'}(x)\}$ 使 $\lim\limits_{\nu',\mu'\to\infty}\|K\varphi_{\nu'}-K\varphi_{\mu'}\|_k=0$．从而由于

$$\begin{aligned}\|K\tilde{\varphi}_{\nu'}-K\tilde{\varphi}_{\mu'}\|_k &\leqslant\|K\tilde{\varphi}_{\nu'}-K\varphi_{\nu'}\|_k+\|K\varphi_{\nu'}-K\varphi_{\mu'}\|_k\\ &\quad+\|K\varphi_{\mu'}-K\tilde{\varphi}_{\mu'}\|_k\\ &\leqslant\|K\|_k\cdot\|\tilde{\varphi}_{\nu'}-\varphi_{\nu'}\|+\|K\varphi_{\nu'}-K\varphi_{\mu'}\|_k\\ &\quad+\|K\|_k\cdot\|\varphi_{\mu'}-\tilde{\varphi}_{\mu'}\|_k,\end{aligned}$$

便有 $\lim\limits_{\nu',\mu'\to\infty}\|K\tilde{\varphi}_{\nu'}-K\tilde{\varphi}_{\mu'}\|_k=0$． 証毕

§ 43 有基底的 Banach 空間中的全連續算子

在本章里我們专門討論有基底的 Banach 空間，正如在 § 13 所定义的那样，Banach 空間 X 叫做有基底的是指在 X 中可以适当地选取 X 的可数个元素 $e_1, e_2, \cdots$，使得 X 的任一元素 x 能借常数 $c_i(x)$ 唯一地表示成

$$x=\text{s-}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}c_i(x)e_i=\sum_{i=1}^{\infty}c_i(x)e_i. \tag{43.1}$$

由这表示的唯一性可知对于任意的常数 α, β, 成立着

$$c_i(\alpha x+\beta y)=\alpha c_i(x)+\beta c_i(y). \tag{43.2}$$

从而由

$$S_n x=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)e_i, \qquad R_n x=\text{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=n+1}^{m} c_i(x)e_i \tag{43.3}$$

定义了从 X 到 X 内的加法算子 S_n, R_n. 对于这两个算子 S_n, R_n, 下面的基本定理(証明見 § 46)成立。

定理 10.1　加法泛函 $c_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots)$ 是連續的, 卽 $c_i(x)\in X^*$.

系 1　任意的 $f(x)\in X^*$ 可唯一地表示成

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i(x)f_i=\sum_{i=1}^{\infty} c_i(x)f_i. \tag{43.4}$$

証明　由 $f(x)$ 的連續性及(43.1)就得到

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x)e_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i(x)f_i, \quad f_i=f(e_i).$$

又于(43.1)中令 $x=e_i$, 得

$$c_i(e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } i=j,\\ 0 & \text{当 } i\neq j,\end{cases} \tag{43.5}$$

由此便可知表示的唯一性。

注　$\{c_i(x)\}$ 在 (43.4) 意义下称为共轭空間 X^* 的基底, $\{e_i\}$ 与 $\{c_i\}$ 在(43.5)的意义下称为双正交系。

系 2　S_n, R_n 为連續算子, 且

$$\sup_{n\geq 1}\|S_n\|<\infty, \qquad \sup_{n\geq 1}\|R_n\|<\infty. \tag{43.6}$$

証明　因为 $S_n x=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)e_i$ 是連續算子, 由(43.1)与共鳴定理(§ 21)有 $\sup_{n\geq 1}\|S_n\|<\infty$. 从而更得

$$\|R_n x\|=\|x-S_n x\|\leq\|x\|+\sup_{n\geq 1}\|S_n\|\cdot\|x\|$$

卽

$$\sup_{n\geq 1}\|R_n\|\leq 1+\sup_{n\geq 1}\|S_n\|<\infty.$$

定理 10.2 从 X 到 X 内的全連續算子 K 在如下意义下是"几乎有限維的"(almost finite dimensional)，即对于任意的 $\varepsilon>0$，总可确定有限維的子空間 X_n，并将 K 表达成形如

$$K=K_1+K_2$$

的有界加法算子的和，使 $\|K_2\|<\varepsilon$，而 K_1 将 X 映照到 X_n。

証明 对于任意的正整数 n，令

$$Kx=y=S_ny+R_ny=S_nKx+R_nKx=K_1x+K_2x.$$

$K_1=S_nK$ 将 X 映照到 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 所張的有限維的子空間 X_n，因此只需証明当 n 充分大时 $K_2=R_nK$ 的范数 $\leqslant\varepsilon$ 卽可。其証如下：

由于 K 的全連續性，X 的单位球 $S=\{x;\|x\|\leqslant 1\}$ 經过算子 K 作用后所得出的象 $KS=\{Kx;\|x\|\leqslant 1\}$ 是全有界 (totally bounded) 的，也就是說，

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于任意的 }\delta>0\text{，总可适当地选取 }KS\text{ 中的有限}\\ \text{个点 }y_1, y_2, \cdots, y_m\text{，使得对于任意的}\\ y\in KS\text{ 有 }\inf\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\|y-y_j\|\leqslant\delta.\end{array}\right\}\quad(43.7)$$

假如这个不成立的話，那么对于某个 $\delta>0$，将可选出无限列 $\{y_i\}\subseteq KS$ 使 $\|y_i-y_j\|>\delta(i\neq j)$，从而 $\{y_i\}$ 的任何子列都将不强收斂，和 K 的全連續性相違反。

現在对于任意的 $x\in S$，令 $Kx=y$，那么

$$\begin{aligned}\|K_2x\|=\|R_ny\|&=\|y-S_ny\|\leqslant\|y-y_j\|+\|y_j-S_ny\|\\ &\leqslant\|y-y_j\|+\|S_ny_j-S_ny\|+\|R_ny_j\|\\ &\leqslant(1+\sup_{n\geqslant 1}\|S_n\|)\|y-y_j\|+\|R_ny_j\|.\end{aligned}$$

右边第 1 項，由于(43.7)，当适当地选取 $j\leqslant m$ 时 $\leqslant(1+\sup\limits_{n\geqslant 1}\|S_n\|)\delta$。右边第 2 項，对于无論哪一个 $y_j(j=1,2,\cdots,m)$，当 $n\to\infty$ 时都 $\to 0$ (由(43.1))。因此只要取 $\delta>0$ 充分小又取 n 充分大，就有 $\|K_2\|\leqslant\varepsilon$。

§44　由抽象积分方程 $x-Kx=y$ 到联立一次方程的轉換

設 K 为从有基底的 Banach 空間 X 到 X 內的全連續算子，考虑对于已知的 $y\in X$ 及 $g\in X^*$，解

$$x-Kx=y, \tag{44.1}$$

$$f-K^*f=g \tag{44.2}$$

而求 $x\in X$ 及 $f\in X^*$ 的間題。把抽象积分方程(44.1)和它的共軛方程(44.2)并列起来考虑，这乃是当 K 为积分算子

$$(K\cdot x)(\xi)=\int_a^b K(\xi,\ \eta)x(\eta)d\eta,$$

同时 K^* 为由 $K(\xi,\ \eta)$ 的轉置核 (transposed kernel) $K^*(\xi,\ \eta)=K(\eta,\ \xi)$所造成的形如

$$(K^*f)(\xi)=\int_a^b K(\eta,\ \xi)f(\eta)d\eta$$

的算子这一情形的抽象化。(44.1)～(44.2)可照下面的步驟轉換成联立一次方程。

(第1段)　取定理10.2中的 $\varepsilon>0$，使得 $1>\varepsilon>0$，則$(I-K_2)$具有有界逆算子$(I-K_2)^{-1}$. 其証如下:

考虑 Neumann 級数

$$I+K_2+K_2^2+K_2^3+\cdots, \tag{44.3}$$

当 $t>s$ 时，

$$\left\|\sum_{j=s}^{t}K_2^jx\right\|\leqslant\sum_{j=s}^{\infty}\|K_2^jx\|\leqslant\sum_{j=s}^{\infty}\|K_2\|^j\cdot\|x\|$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=s}^{\infty}\varepsilon^j\right)\cdot\|x\|$$

随着 $s\to\infty$ 而 $\to0$. 从而由 X 的完备性,

$$\sum_{j=0}^{\infty}K_2^jx=\text{s-}\lim_{t\to\infty}\sum_{j=0}^{t}K_2^jx=K_2'x$$

被定义，K_2'为有界算子的事实可由共鳴定理(§21)得知。又

$K_2'=(I-K_2)^{-1}$ 的事实可由

$$(I-K_2)K_2'=K_2'(I-K_2)=\sum_{j=0}^{\infty}K_2^j-\sum_{j=1}^{\infty}K_2^j=I$$

得知。

因 $(I-K_2)$ 一对一地将 X 映照到 X 全体，故将(44.1)写为

$$(I-K_2)x-K_1x=y,$$

幷令

$$(I-K_2)x=x_1 \text{ 从而 } x=(I-K_2)^{-1}x_1 \tag{44.4}$$

时得

$$x_1-K_1(I-K_2)^{-1}x_1=y. \tag{44.1'}$$

利用 x 与 x_1 的对应(44.4)，解(44.1)求 x 与解(44.1′)求 x_1 是等价的，幷且算子

$$L=K_1(I-K_2)^{-1} \tag{44.5}$$

和 K_1 一样，是将 X 映照到由 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 張成的有限維子空間 X_n 的"有限維的算子"。

由于 $K^*=(K_1+K_2)^*=K_1^*+K_2^*$，且依定理5.5，$\|K_2^*\|=\|K_2\|\leqslant\varepsilon$，可知和上面一样，$(I^*-K_2^*)^{-1}=\sum\limits_{j=0}^{\infty}(K_2^*)^j$ 是存在的。将(44.2)写成

$$(I^*-K_2^*)f-K_1^*f=g,$$

幷令 $(I^*-K_2^*)^{-1}$ 作用于两边，得

$$f-(I^*-K_2^*)^{-1}K_1^*f=(I^*-K_2^*)^{-1}g. \tag{44.2'}$$

容易知道

$$L^*=(K_1(I-K_2)^{-1})^*=((I-K_2)^{-1})^*\cdot K_1^*=(I^*-K_2^*)^{-1}\cdot K_1^*,$$

因此，和(44.2)等价的(44.2′)可写成

$$f-L^*f=g_1,\qquad g_1=(I^*-K_2^*)^{-1}g. \tag{44.2''}$$

（第2段） 設

$$Le_i=\sum_{k=1}^{\infty}l_{ki}e_k=\text{s-}\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{t}l_{ki}e_k, \tag{44.6}$$

那么，由于 L 的連續性，对于 $x_1=\sum_{i=1}^{\infty}c_i(x_1)e_i=\text{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}c_i(x_1)e_i$ 有

$$Lx_1=\text{s-}\lim_{m\to\infty}L\cdot\sum_{i=1}^{m}c_i(x_1)e_i=\text{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}c_i(x_1)Le_i$$

$$=\text{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}c_i(x_1)\left(\text{s-}\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{t}l_{ki}e_k\right).$$

另一方面，由于 Lx_1 属于 X_n，有

$$Lx_1=\sum_{s=1}^{n}c_s(Lx_1)e_s,$$

亦即 $s>n$ 时有 $c_s(Lx_1)=0$. 但由于 $c_s(x)$ 的連續性与(43.5)，

$$c_s(Lx_1)=\lim_{m\to\infty}c_s\left(\sum_{i=1}^{m}c_i(x_1)\left(\text{s-}\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{t}l_{ki}e_k\right)\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{m}c_i(x_1)\left\{\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{t}l_{ki}c_s(e_k)\right\}\right]$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}c_i(x_1)l_{si},$$

因此

$$\text{当 } s>n \text{ 时 } \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}c_i(x_1)l_{si}=0.$$

令 $x_1=e_i$，利用(43.5)便得下面的結果：

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果由(44.6)定义无限矩陣}(l_{si})\text{的話，}\\ \text{那么当 } s>n \text{ 时，} l_{si}=0\quad(i=1,2,\cdots),\end{array}\right\}\tag{44.7}$$

从而

$$Lx_1=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}l_{si}c_i(x_1)\right)e_s.\tag{44.8}$$

于是用坐标来表示和(44.1′)等价的

$$x_1-Lx_1=y\left(=\sum_{s=1}^{\infty}c_s(y)e_s\right),\tag{44.1''}$$

时便成为无限联立方程

$$c_s(x_1)-\sum_{i=1}^{\infty}l_{si}c_i(x_1)=c_s(y)\qquad(s=1,2,\cdots).\tag{44.1'''}$$

同样，設 $L^*f=\varphi$，即 $f(Lx)=\varphi(x)$. 又置

$$f=\sum_{i=1}^{\infty} c_i f(e_i), \quad \varphi=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi(e_i),$$

則由(44.8)有

$$f(Lx)=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} l_{si} c_i(x)\right) f(e_s),$$

$$f(Lx)=\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i(x) \varphi(e_i).$$

在此令 $x=e_j$，利用(43.5)得到

$$\sum_{s=1}^{n} l_{sj} f(e_s)=\varphi(e_j), \tag{44.9}$$

于是得知和(44.2)等价的(44.2″)用坐标来表示时和

$$f(e_j)-\sum_{s=1}^{n} l_{sj} f(e_s)=g_1(e_j) \qquad (j=1, 2, \cdots) \tag{44.2‴}$$

等价。

§ 45 Riesz-Schauder 的理論

把 (44.1‴) 与 (44.2‴) 并列着来求解。由于 (44.7)，方程 (44.1‴)是和

$$\left.\begin{aligned} &c_s(x_1)-\sum_{i=1}^{\infty} l_{si} c_i(x_1)=c_s(y) \quad (s=1, 2, \cdots, n), \\ &c_s(x_1)=c_s(y) \quad (s=n+1, n+2, \cdots) \end{aligned}\right\} \tag{45.1}$$

等价的，因此 $s \geqslant n+1$ 的 $c_s(x_1)$ 立刻可以求出来。将它們代入(45.1)中的第一式得到

$$\left.\begin{aligned} c_s(x_1)-\sum_{i=1}^{n} l_{si} c_i(x_1)=c_s(y)+\sum_{i=n+1}^{\infty} l_{si} c_i(y) \\ (s=1, 2, \cdots, n). \end{aligned}\right\} \tag{45.2}$$

如能解出(45.2)而求得 $c_s(x_1)$ $(s=1, 2, \cdots, n)$ 的話，那么(44.1‴)也就被解出了。

同样，要解(44.2‴)只需先解

$$f(e_j)-\sum_{s=1}^{n} l_{sj} f(e_s)=g_1(e_j) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{45.2'}$$

求出 $f(e_j)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，然后将它們的值代入，再由

$$f(e_j)=\sum_{s=1}^{n} l_{sj} f(e_s)+g_1(e_j) \qquad (45.3)$$

来求 $f(e_j)$ $(j=n+1, n+2, \cdots)$ 好了。

可是令 (45.2) 右边为 0 所得的联立一次方程的系数与令 (45.2′) 右边为 0 的联立一次方程的系数显然处于附标 s 与 i 互相交换的关系，因此，由关于联立一次方程的熟知結果得到

(I) (45.2) 对于任意給定的右边唯一地可解的充要条件为 (45.2′) 对于任意給定的右边唯一地可解。这是因为这个条件等价于方程系数所作行列式 $(s, i=1, 2, \cdots, n)$ 不为 0:

$$\det(\delta_{si}-l_{si}) \neq 0.$$

从而这情形也等价于右边为 0 的齐次方程除 $c_1(x_1)=c_2(x_1)=\cdots=c_n(x_1)=0$, $f(e_1)=f(e_2)=\cdots=f(e_n)=0$ 以外不存在其他的解。

(II) 根据上面，如果 (45.2) 右边为 0 的齐次方程具有不全为 0 的解 $c_s(x_1)$ $(s=1, 2, \cdots, n)$ 的話，那么 (45.2′) 右边为 0 的齐次方程也必具有不全为 0 的解 $f(e_j)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$。这时这些解中綫性独立者的个数对于 (45.2) 和对于 (45.2′) 是相同的。又这时非齐次方程 (45.2) 可解的充要条件为，由 (45.2) 的右边所作的矢量

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n), \qquad v_s=c_s(y)+\sum_{t=n+1}^{\infty} l_{st} c_t(y) \qquad (45.4)$$

和在 (45.2′) 中令右边为 0 所得的一切解作成的矢量

$$(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$$

正交:

$$\sum_{s=1}^{n} v_s f(e_s)=0. \qquad (45.5)$$

把以上所討論的轉到原来的 (44.1), (44.2), 便可将 Riesz-Schauder 的理論叙述如下:

定理 10.3 (Riesz-Schauder) 設 K 为从有基底的 Banach

空間 X 到 X 内的全連續算子：(i) (44.1) 对于任意的 $y\in X$ 在 X 内唯一地可解的充要条件为 (44.2) 对于任意的 $g\in X^*$ 在 X^* 内唯一地可解。(ii) 上面的条件和右边为 0 的齐次方程只有 $x=0$ 及 $f=0$ 的解是等价的。(iii) (44.1) 右边为 0 的齐次方程的解中綫性独立解的个数和 (44.2) 右边为 0 的齐次方程的解中綫性独立解的个数是一致的。(iv) 对于給定的 y, (44.1) 可解的充要条件为：对于 (44.2) 右边为 0 的齐次方程的任意的解 f, $f(y)=0$ 成立。

証明 (i)～(iii) 根据上面的討論几乎是显然的，所以只需对 (iv) 加以証明。首先，由

$$x-Kx=y,\quad f-K^*f=0$$

得 $f(y)=f(x-Kx)=f(x)-(K^*f)(x)=0$, 因此条件的必要性可以明白。

其次証 (iv) 的条件的充分性。f 为 $f-K^*f=0$ 的解和 f 为 $f-L^*f=0$ 的解是等价的，又 $x-Kx=y$ 可解和 $x_1-Lx_1=y$ 可解也是等价的。因此上述的条件就和对于

$$f(e_j)-\sum_{s=1}^{n} l_{sj}f(e_s)=0\qquad (j=1,\ 2,\ \cdots)$$

的解 $f(e_j)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots)$ 作

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{j=1}^{\infty} c_j(x)\,f(e_j)\\&=\sum_{j=1}^{n}c_j(x)f(e_j)+\sum_{j=n+1}^{\infty}c_j(x)\left(\sum_{s=1}^{n}l_{sj}f(e_s)\right)\end{aligned}$$

时，

$$f(y)=\sum_{j=1}^{n}c_j(y)f(e_j)+\sum_{j=n+1}^{\infty}c_j(y)\left(\sum_{s=1}^{n}l_{sj}f(e_s)\right)=0$$

成立是等价的。由于最后这条件等价于 (45.5), 故如在 (II) 的末段所述，它意味着 (45.2) 可解，結果也意味着 $x_1-Lx_1=y$, 从而 $x-Kx=y$ 可解。

注 1　Riesz-Schauder 的理論，即使不假定基底的存在，在上面定理的形式之下仍然成立❶，所以假定基底的存在而采用上述証明，一方面是想将全連續的"几乎有限維"性尽量清楚地显示出来，另一方面也因为上述証明本身，如象注 2 所示一样，也提示了如何将給定的积分方程轉換成联立一次方程而具体来解积分方程的方法，从而有其实用的意义。

注 2　当 K 为由 $K(x, y)$ 作出的积分算子时，虽然从表面上看并不出現基底，但可照下面这样轉換为联立一次方程❷。实則前面所述的 Люстерник-Соболев 的方法正是将这个方法——最初由 E. Schmidt❸ 提出的——一般化了的。

确定两組各在 $[a, b]$ 上綫性独立的連續函数

$$\alpha_1(s),\ \alpha_2(s),\ \cdots,\ \alpha_n(s);\ \beta_1(t),\ \beta_2(t),\ \cdots,\ \beta_n(t)$$

使满足条件

$$\int_a^b\int_a^b \left|K(s, t)-\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu(s)\beta_\nu(t)\right|^2 ds\,dt<1.$$

如果在这里令

$$K_2(s, t)=K(s, t)-\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu(s)\beta_\nu(t)=K(s, t)-K_1(s, t),$$

那么，对于由核 $K_2(s, t)$ 作出的算子 K_2，$(I-K_2)$ 的逆算子 $(I-K_2)^{-1}=L=I+\Gamma$ 由 Neumann 級数

$$L=(I-K_2)^{-1}=I+K_2+K_2^2+K_2^3+\cdots=I+\Gamma$$

給出，但

$$(K_2^i x)(s)=\int_a^b K_2^{(i)}(s, t)x(t)\,dt,$$

$$K_2^{(i)}(s, t)=\int_a^b K_2^{(i-1)}(s, u)K_2(u, t)\,du,$$

$$K_2^{(1)}(s, t)=K_2(s, t).$$

---

❶　見前面所引的原著論文。吉田：位相解析 I (岩波)，114～126，书中有另一証明。

❷　吉田：积分方程式論(岩波)，121 頁以后。

❸　Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen, Math. Ann., **64** (1907), 161 頁以后。

从而 $x-Kx=y$，亦即 $x-K_2x-K_1x=y$ 可轉换为

$$x-K_1x-\Gamma K_1x=(I+\Gamma)y,$$

亦即

$$x(s)=y(s)+\int_a^b \Gamma(s,\ r)y(r)dr$$
$$+\sum_{\nu=1}^n \rho_\nu\left(\alpha_\nu(s)+\int_a^b \Gamma(s,\ r)\alpha_\nu(r)dr\right),$$
$$\rho_\mu=\int_a^b \beta_\mu(t)x(t)dt.$$

把这个 $x(s)$ 代入 ρ_μ 的定义式而解出关于未知数 $\rho_1,\ \cdots,\ \rho_n$ 的联立一次方程

$$\rho_\mu-\sum_{\nu=1}^n \rho_\nu\left[\int_a^b \alpha_\nu(s)\beta_\mu(s)ds+\int_a^b \Gamma(s,\ r)\alpha_\nu(r)\beta_\mu(s)dr\,ds\right]$$
$$=\int_a^b\left(\beta_\mu(t)+\int_a^b \Gamma(r,\ t)\beta_\mu(r)dr\right)y(t)dt \quad (\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

的話，便算得到了解 $x(s)$. 同样，求解方程

$$f-K^*f=g, \qquad K^*(x,\ y)=K(y,\ x)$$

就和解出关于未知数 $\rho'_1,\ \cdots,\ \rho'_n$ 的联立一次方程

$$\rho'_\mu-\sum_{\nu=1}^n \rho'_\nu\left[\int_a^b \alpha_\mu(t)\beta_\nu(t)dt+\int_a^b \Gamma(r,\ t)\alpha_\mu(t)\beta_\nu(r)dr\,dt\right]$$
$$=\int_a^b\left(\alpha_\mu(s)+\int_a^b \Gamma(s,\ r)\alpha_\mu(r)dr\right)g(s)ds \quad (\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

并由

$$f(t)=g(t)+\int_a^b \Gamma(r,\ t)g(r)dr+\sum_{\nu=1}^n \rho'_\nu\left(\beta_\nu(t)\right.$$
$$\left.+\int_a^b \Gamma(r,\ t)\beta_\nu(r)dr\right)$$

而求 $f(t)$ 这两者是等价的。由决定 ρ 的联立齐一次方程的系数所作矩陣与由决定 ρ' 的联立齐一次方程的系数所作矩陣显然互为交换行与列的轉置矩陣。利用这一事实，和得到定理 10.3 过程一

样，可以証明 Fredholm 的理論。

§46　根据 Banach 可逆定理的定理 10.1 的証明

首先，为叙述 Baire-Hausdorff 定理作准备。

第一綱集的定义　設 M 为距离空間 X 中的子集。如果将 M 的一切点列的极限点添加于 M 后所得的集合 M^a(也就是説 M 的閉包)与 X 一致，就称 M 在 X 內稠密。当 $X-M^a$ 在 X 內稠密时称 M 为 X 內的疏(non-dense)集。X 的子集 A，当它可表达为至多可数个(在 X 內)疏集的和集时，称为(在 X 內的)**第一綱的集**(set of first category)。例如实軸 X 上的至多可数的点集便是在 X 內的第一綱的集。这是因为 X 上的任一点組成 X 內的一个疏集。

定理 10.4 (Baire-Hausdorff)　完备的距离空間不是第一綱集❶。

証明　設 $M_n (n=1, 2, \cdots)$ 为疏集，今从 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 的假定来导出矛盾。由于 M_1 为疏集，故 $X-M_1^a$ (在 X 內)稠密且作为閉集 M_1^a 的余集是开集，从而 $X-M_1^a$ 包含一个半徑 <1 的閉球 $K_1$❷(可以取它的中心和 X 中的任一預先給定的点任意接近)。同样，稠密的开集 $X-M_2^a$ 包含一个含于 K_1 之中的半徑 $<1/2$ 的閉球 K_2，継續这样下去可选出半徑 $<\frac{1}{n}$ 的閉球 K_n 的列 $\{K_n\}$ 满足

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq \cdots,\ \text{且}\ K_n\ \text{与}\ M_n^a\ \text{无公共点。}$$

設 K_n 的中心为 x_n，那么当 $n>m$ 时，$x_n \in K_m$ 而 $\operatorname{dis}(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{m}$. 从而由 X 的完备性，存在 $x \in X$ 使 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dis}(x, x_n)=0$. 在 $\operatorname{dis}(x, x_m) \leqslant \operatorname{dis}(x, x_n)+\operatorname{dis}(x_n, x_m) \leqslant \operatorname{dis}(x, x_n)+m^{-1} (n>m)$

---

❶ (在 X 內)不是第一綱的集也称为(在 X 內)第二綱的集。——譯者注

❷ 当 $r>0$ 时称集 $\{x\in X;\ \operatorname{dis}(x, x_0)\leqslant r\}$ 为以 x_0 做中心、r 做半徑的閉球。

中，令 $n\to\infty$ 得 $\operatorname{dis}(x, x_m)\leqslant\frac{1}{m}$，亦即 $x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}K_m$。由此得 $x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}M_m$ 与 $X=\bigcup_{m=1}^{\infty}M_m$ 矛盾。

注　"实数全体所作的集合不是可数的"，这个所謂 Cantor 的定理乃是上面定理的特殊情形，这是因为实数全体按距离 $\operatorname{dis}(x, y)=|x-y|$ 是完备的緣故。

由定理 10.4 就可以証明 Banach 的可逆定理，这就是

定理 10.5 (Banach)　如果从 Banach 空間 X_1 到 Banach 空間 X 內的有界加法算子 T 将 X_1 一对一地映照到 X 全体，那么逆算子 T^{-1} 是連續的。

暂将这定理的証明移后，先利用它来証明定理 10.1。

定理 10.1 的証明　考虑数列 $a=\{\alpha_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 中对于 X 的基底 $\{e_i\}$ 能令 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\in X$ 存在的这种数列 $a=\{\alpha_i\}$ 的全体 X_1 按

$$\gamma a+\delta b=\gamma\{\alpha_i\}+\delta\{\beta_i\},$$

$$\|a\|=\|\{\alpha_i\}\|=\sup_{n\geq 1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|$$

作成賦范空間，而且 X_1 是完备的。完备性的証明：如果 X_1 的点列

$$\{a_k\},\quad a_k=\{\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \alpha_3^{(k)}, \cdots\}$$

滿足 Cauchy 收斂条件的話，那么对于任意的 $\varepsilon>0$，可确定 $m=m_0(\varepsilon)$，使得

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } m,\ k\geqslant m_0(\varepsilon) \text{ 时，对于一切的 } n,\\ \left\|\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(k)})e_i\right\|\leqslant\|a_m-a_k\|<\varepsilon.\end{array}\right\}\tag{46.1}$$

从而当 $m,\ k\geqslant m_0(\varepsilon)$ 时，对于一切的 n 有

$$\|(\alpha_n^{(m)}-\alpha_n^{(k)})e_n\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(k)})e_i\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(k)})e_i\right\|$$
$$<2\varepsilon.$$

于是，由于

当 $m, k \geqslant m_0(\varepsilon)$ 时，$|\alpha_n^{(m)}-\alpha_n^{(k)}|<2\varepsilon\cdot\|e_n\|^{-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$，对于 $n=1, 2, \cdots$，必存在有限的 $\alpha_n^{(0)}=\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_n^{(k)}$。在 (46.1) 中令 $k\to\infty$，便知

$$\text{当 } m\geqslant m_0(\varepsilon) \text{ 时}, \left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(0)})e_i\right\|\leqslant\varepsilon \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{46.2}$$

因此，当 $m\geqslant m_0(\varepsilon)$ 时，得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+p}\alpha_i^{(0)}e_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(0)}e_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n+p}\alpha_i^{(m)}e_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(m)}e_i\right\|+2\varepsilon,$$

而由于 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\alpha_i^{(m)}e_i\in X$ 的存在，

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n+p}\alpha_i^{(0)}e_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(0)}e_i\right\|\leqslant2\varepsilon \quad (p=1, 2, \cdots).$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，这說明了 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{(0)}e_i\in X$ 的存在，亦即 $a_0=\{\alpha_i^{(0)}\}\in X_1$。又从 (46.2) 还有 $\lim\limits_{m\to\infty}\|a_m-a_0\|=0$，这样 X_1 的完备性就算証明了。

現在作算子 T 如下：对于每个 $a=\{\alpha_i\}\in X_1$，令 Ta 为

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_ie_i=\text{s-}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\in X,$$

則算子 T 将 Banach 空間 X_1 一对一地映照到 Banach 空間 X，而且由于

$$\|Ta\|=\|x\|\leqslant\sup_{n\geqslant1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|=\|a\|,$$

T 是連續的。因此依定理 10.5，$T^{-1}(T^{-1}x=a)$ 也是連續的。

从而对于 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i(x)e_i=\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}c_i(x)e_i$ 得

$$\begin{aligned}\|c_i(x)e_i\|&\leqslant\left\|\sum_{j=1}^{i}c_j(x)e_j\right\|+\left\|\sum_{j=1}^{i-1}c_j(x)e_j\right\|\\&\leqslant2\sup_{n\geqslant1}\left\|\sum_{j=1}^{n}c_j(x)e_j\right\|\leqslant2\|\{c_i(x)\}\|=2\|T^{-1}x\|,\end{aligned}$$

而 $|c_i(x)|\leqslant 2\|T^{-1}x\|\cdot\|e_i\|^{-1}\leqslant 2\|e_i\|^{-1}\cdot\|T^{-1}\|\cdot\|x\|$。这就是說加法的泛函 $c_i(x)$ 是連續的。 証毕

定理 10.5 的証明 (第1段) 如果从 Banach 空間 X_1 到 Banach 空間 X 內的有界加法算子 T 将 X_1 映照到 X 全体,那么对于任意的 $\varepsilon>0$ 可确定 $\eta(\varepsilon)>0$, 使得 X_1 的閉球 $\{x;\|x\|\leqslant\varepsilon\}$ 的經过算子 T 映照后所得的象 $\{Tx;\|x\|\leqslant\varepsilon\}$ 在 X 的球 $\{y;\|y\|\leqslant\eta(\varepsilon)\}$ 內稠密。証明如下:設 $G_n=\{x;\|x\|\leqslant 2^{-1}n\varepsilon\}$ 的經过 T 映照后的象为 H_n, 那么由于假定的 $X=TX_1$ 有 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H_n$。因为 X 是完备的,故依定理 10.4 必有一个 H_{n_0} 的閉包 $H_{n_0}^a$ 包含 X 的一个閉球 K_{n_0}。設 K_{n_0} 的中心为 n_0y_0, 半徑为 $n_0\eta_0$。这样, H_1 的閉包 H_1^a 亦必包含中心为 y_0, 半徑为 η_0 的閉球 K_1。現在設以 H_1 的点 y_0' 为中心, $\eta(\varepsilon)$ 为半徑的閉球 K_1' 完全含于 K_1 中,且設

$$y_0'=Tx_0',\quad x_0'\in G_1.$$

那么,因为对于任意的 $z\in K_1'$ 及任意的 $\delta>0$, 总可选 x' 使

$$z'=Tx',\quad x'\in G_1\ \text{且}\ \|z'-z\|\leqslant\delta,$$

所以得到

$$T(x_0'-x')=y_0'-z',\quad y_0'-z'=y_0'-z+(z-z'),$$

$$\|x_0'-x'\|\leqslant 2\cdot 2^{-1}\varepsilon=\varepsilon,\quad \|y_0'-z\|\leqslant\eta(\varepsilon),\quad \|z-z'\|\leqslant\delta.$$

因为 $\delta>0$ 是任意的,并且当 z 在 K_1' 上变动时, $y=y_0'-z$ 經历着 X 的球 $\|y\|\leqslant\eta(\varepsilon)$ 中各点,故結果是 X_1 的球 $\|x\|\leqslant\varepsilon$ 的經过 T 映照后的象在 X 的球 $\|y\|\leqslant\eta(\varepsilon)$ 內稠密。

(第2段) 由第1段,对于 $\varepsilon_i=2^{-i}\varepsilon$ 可确定 $\eta_i=\eta(\varepsilon_i)$ 适合

$$\eta_i>\eta_{i+1}>0\ \text{且}\ \lim_{i\to\infty}\eta_i=0,$$

使得 X_1 的球 $\|x\|\leqslant 2^{-i}\varepsilon$ 的經过 T 映照后所得到的象在 X 的球 $\|y\|\leqslant\eta_i$ 內稠密,从而任取 $\|y\|\leqslant\eta_1$ 这样的 $y\in X$ 时,总可确定 y_1 使 $\|y-y_1\|\leqslant\eta_2$ 且 $y_1=Tx_1$, $\|x_1\|\leqslant 2^{-1}\varepsilon$。重复同样的論法可順次确定 $y_2, y_3, \cdots\in X$ 使

$$\left\|y-\sum_{m=1}^{n} y_m\right\| \leqslant \eta_{n+1}, \quad y_n = Tx_n, \quad \|x_n\| \leqslant 2^{-n}\varepsilon$$

成立，但因 $m>k$ 时

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} x_n - \sum_{n=1}^{k} x_n\right\| \leqslant \left\|\sum_{n=k+1}^{m} x_n\right\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{m}\|x_n\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{m} \varepsilon 2^{-n} \to 0 \ (k\to\infty),$$

故由于 X_1 的完备性，$x = \text{s-}\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} x_n \in X_1$ 被确定，$\|x\| \leqslant 2\varepsilon$ 而且由于 T 的連續性，

$$Tx = \text{s-}\lim_{m\to\infty} T\left(\sum_{n=1}^{m} x_n\right) = \text{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} Tx_n = \text{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} y_n = y\text{❶}.$$

注　由上面的証明可推知以下的事实：如果 T 是从 Banach 空間 X_1 到 Banach 空間 X 内的有界加法算子，則 X_1 經过 T 映照后的象 TX_1 或者与 X 一致，或者是 X 的第一綱的集，这称为 Banach 的值域定理。我們知道，将 n 維 Hilbert 空間 $l_2(n)$ 映照到 $l_2(n)$ 内的有界加法算子 T 是由 n 級矩陣 (t_{ij}) 給出的，T 将 $l_2(n)$ 或者一对一地映照到 $l_2(n)$ 上 $(\det(t_{ij})\neq 0)$，或者映照到 $l_2(n)$ 的維数 $<n$ 的厦子空間上 ($\det(t_{ij})=0$ 的情形)。在前一情形下，T 具有由 $(t_{ij})^{-1}$ 給出的連續逆算子 T^{-1}。可逆定理及值域定理可看做是这个事实在无限維 Banach 空間的推广。

§47　全連續算子的特征值的分布

設給定了一个定义域和值域同时属于矢量空間 X 的加法算子 T。当对于 $x\in X$，$x\neq 0$ 及复数 λ 成立着

$$Tx = \lambda x \tag{47.1}$$

时，称 λ 为 T 的一个**特征值**(eigenvalue)，x 称为相应于这个特征值 λ 的一个**特征矢量**。对于給定的 X 及 T，如何决定它的全部的特征值以及和它們相应的特征函数(特征矢量)的所謂**特征值問題**形成了泛函分析中最大的一章，特別是 Hilbert 空間 X 中对称算

---

❶ 由于假設 T^{-1} 存在，本段的結果可概括为：当 $\|y\|\leqslant\eta_1$ 时，$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leqslant \varepsilon$，这就說明了 T^{-1} 的連續性。——譯者注

子的特征值問題，虽然发軔于弦振动及膜振动等古典的数学物理問題，經过 J. von Neumann 进一步发展之后却为量子力学奠定了数学的基础。关于 Neumann 的研究将在第 11 章讲述，在本节只討論全連續算子特征值的分布。讲了这个以后，Fredholm 理論的抽象的处理便臻于完成了。

定理 10.6 (F. Riesz) 如果賦范空間 X 的閉子空間 S 与 X 不一致，那么对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in X$ 滿足

$$\|x_\varepsilon\|=1,\quad \mathrm{dis}\,(x_\varepsilon,\ S)\text{❶}=\inf_{x\in S}\|x_\varepsilon-x\|\geqslant 1-\varepsilon.$$

証明 任取 X 中不属于 S 的一点 y，由于 S 是閉集，必然 $\alpha=\mathrm{dis}(y,\ S)>0$，从而在 S 中存在着滿足

$$\alpha\leqslant\|y-z\|\leqslant\alpha(1+\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1})$$

的点 z。令 $x_\varepsilon=(y-z)/\|y-z\|$，则 $\|x_\varepsilon\|=1$，且对于一切的 $x\in S$，

$$\|x_\varepsilon-x\|=\|y-z\|^{-1}\cdot\|y-z-x\cdot\|y-z\|\|.$$

由于 $z,\ x\in S$，$z+x\cdot\|y-z\|$ 也属于子空間 S，所以

$$\|x_\varepsilon-x\|\geqslant\|y-z\|^{-1}\cdot\alpha\geqslant(1+\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1})^{-1}=1-\varepsilon.$$

系 1 如果給了賦范空間 X 的閉子空間的有限个或可数个的列 $\{E_n\}$，$E_n\subseteq E_{n+1}$ 且 $E_n\neq E_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，这时必存在点列 $\{y_n\}$ 滿足

$$y_n\in E_n,\ \|y_n\|=1,\ \mathrm{dis}\,(y_{n+1},\ E_n)\geqslant\frac{1}{2}\quad(n=1,2,\cdots).\quad(47.2)$$

証明 用归納法。設 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1}$ 已求得，那么令

$$E_{n-1}=S,\ E_n=X,\ \varepsilon=2^{-1},$$

則由上面定理所得的 x_ε 即可作为 y_n。

系 2 賦范空間 X 为有限維的❷充要条件是：X 的单位球

---

❶ $\mathrm{dis}\,(x_\varepsilon,\ S)$ 表示 x_ε 与 S 的距离。

❷ 这就是說，存在綫性独立的 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in X$，使得 X 的任一元 x 可表为 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 的綫性組合 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$。

$\{x; \|x\| \leqslant 1\}$为全有界的。

証明　必要性是显然的。这是因为，由定理10.1，X与同維数的 Euclid 空間(作为賦范空間)是等价的緣故❶。充分性的証明：設X不是有限維的，那么系1里的那种可数个子空間$\{E_n\}$必然存在。这样一来，满足$\|y_n\|=1$，$\|y_n-y_m\|\geqslant 2^{-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$的可数点列$\{y_n\}$也将存在，X的单位球便不是全有界的了。

有了以上的准备之后，我們考察特征值方程

$$x-\lambda^{-1}Kx=0 \text{ 亦卽 } Kx=\lambda x.$$

在此設K是从 Banach 空間X到X内的全連續加法算子，且复数λ不为0。

定理 10.7　(i) K的特征值λ的集合至多是一个可数集，并且(ii)这些特征值沒有0以外的聚点。(iii)相应于各特征值$\lambda\neq 0$的特征空間❷的維数是有限的。(iv)如果$\lambda\neq 0$是K的特征值，則λ也是K^*的特征值。(v)如果$\lambda\neq 0$，$\mu\neq 0$是K的不同的特征值，則K的相应于λ的特征矢量x_0与K^*的相应于μ的特征矢量f_0按下面意义正交：$f_0(x_0)=0$。

証明　(i) 設有一列$\{\lambda_n\}$，适合$\lambda_n\neq\lambda_m$ $(n\neq m)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n\neq 0$而且存在着使$Kx_n=\lambda_n x_n$的$x_n\neq 0$，我們由此来导出矛盾。为此先

❶ 当X为有限維时，必具有基底，設为$e_1, \cdots, e_n$，作X上的另一范数$\|x\|_1$如下：

$$\|x\|_1=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|e_i(x)|^2}$$

則X_1按范数$\|x\|_1$成为 Euclid 空間，但由定理10.1，

$$\|x\|_1\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2}\,\|x\|;$$

另一方面显然

$$\|x\|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2}\,\|x\|_1,$$

故范数$\|x\|$与$\|x\|_1$等价。——校者注

❷ 如果$Kx_j=\lambda x_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，則对于任意的綫性組合$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$有$K\cdot\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j=\lambda\cdot\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$。从而相应于$K$的特征值$\lambda$的特征矢量的全体在添加0矢量之后构成$X$的子空間，这称为相应于特征值$\lambda$的特征空間(eigenspace)。

指出,对于所有的 n, x_1, …, x_n 是綫性独立的。利用归納法:假定 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 是綫性独立的,但 x_n 可表为 $x_n=\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j x_j$, 那么由

$$\lambda_n\cdot\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j x_j=\lambda_n x_n=Kx_n=K\cdot\left(\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j x_j\right)=\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j\lambda_j x_j$$

及 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 的綫性独立性將得 $\beta_j(\lambda_n-\lambda_j)=0(j=1,\cdots,n-1)$, 亦即 $\beta_j=0(j=1,\cdots,n-1)$. 从而將得 $0\neq x_n=\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j x_j=0$ 的不合理結果,因此 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不得不是綫性独立的。

于是,設 E_n 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的綫性組合的全体的話,应用前定理系 1 可选出满足(47.2)的可数列$\{y_n\}$. 当 $n>m$ 时❶,

$$Ky_n-Ky_m=\lambda_n y_n-\lambda_m y_m=\lambda_n(y_n-y_m)+(\lambda_n-\lambda_m)y_m$$

的右边第 2 項 $\leqslant|\lambda_n-\lambda_m|\cdot\|y_m\|=|\lambda_n-\lambda_m|$, 当 $m\to\infty$ 时, 它收斂于0. 这是由于存在有限的 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n$. 右边第 1 項 $\geqslant|\lambda_n|\cdot\|y_n-y_m\|\geqslant|\lambda_n|\operatorname{dis}(y_n, E_m)\geqslant|\lambda_n|\cdot 2^{-1}$, 由于 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n\neq 0$, 当 $m\to\infty$ 时它不收斂于 0. 但这是不合理的, 因为既有 $\|y_n\|=1$, 根据 K 的全連續性, $\{Ky_n\}$ 的适当的子列不能不强收斂。

由上面便証明了(i), (ii)。至于(iii)的証明如下: 設 $\lambda\neq 0$ 并假定存在着 $Kx_n=\lambda x_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的可数列 $\{x_n\}$, 其中对于一切的 n, $x_1,\cdots, x_n$ 是綫性独立的,那么可和上面一样地导致矛盾。

(iv) 只須在定理 10.3 的(iii)中用 $\lambda^{-1}K$ 代替 K 就可以了。

(v) 設 $Kx_0=\lambda x_0$, $K^* f_0=\mu f_0$, 則

$$\mu f_0(x_0)=(K^* f_0)(x_0)=f_0(Kx_0)=f_0(\lambda x_0)=\lambda f_0(x_0),$$

而由于 $\lambda\neq\mu$, 不能不 $f_0(x_0)=0$.

---

❶ 此处原书有誤,应改为: $Ky_n=\lambda_n y_n+y_n'$, 但 $y_n'\in E_{n-1}$, 因此当 $n>m$ 时,

$$Ky_n-Ky_m=\lambda_n y_n+y_n'-\lambda_m y_m-y_m'.$$

但是 $y_n'-\lambda_m y_m-y_m'\in E_{n-1}$, 所以

$$\|Ky_n-Ky_m\|=|\lambda_n|\left\|y_n+\frac{1}{\lambda n}(y_n'-\lambda_m y_m-y_m')\right\|\geqslant|\lambda_n|d(y_n, E_{n-1})\geqslant\frac{1}{2}|\lambda_n|.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n\neq 0$, 必有 $\delta>0$ 及自然数 N, 使当 $n, m\geqslant N$ 时 $\|Ky_n-Ky_m\|\geqslant\delta$. ——校者注

第11章　自共轭算子的譜分解

根据 N. Bohr 的频率法则，基本粒子所构成的体系一般是处在和外部不进行能量的交换的定常状态。在定常状态下，体系不作光的輻射。作光的輻射仅限于在受到某种激发而从一个定常状态跃迁到另一定常状态的时候，这时体系所失掉的能量，也就是在两个定常状态的能量的差 (E_1-E_2)，和所輻射的光的频率 ν 之間有关系

$$E_1-E_2=h\nu,\quad 2\pi h=6.624\times10^{-27}\,\mathrm{erg}\times\mathrm{sec}\quad (\text{Planck 常数})。$$

反之，体系吸收频率为 ν 的光时，体系必从能量为 $-E_2$ 的定常状态轉移到能量为 $-E_1$ 的定常状态。由于光的波长 λ 与频率 ν 有

$$\nu\lambda=c=2.99797\times10^{10}\,\mathrm{cm/sec}\quad (\text{光速})$$

的关系，所以决定体系所輻射或吸收的光的譜的問題最后归結到决定体系的可能的定常状态以及对应于該状态的能量 E。

依照 E. Schrödinger，由 f 个基本粒子所成的体系的定常状态由解特征值問題

$$H\psi=E\psi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int|\psi(x_1,y_1,z_1,x_2,\cdots,z_f)|^2dx_1dy_1dz_1\cdots dz_f<\infty$$

而决定。在此，H 是在表示体系的总能量的 Hamilton 函数

$$\sum_{\mu=1}^{f}(2m_\mu)^{-1}(p_{x_\mu}^2+p_{y_\mu}^2+p_{z_\mu}^2)+U(x_1,\cdots,z_f)\text{❶}$$

中施行置换

$$p_{x_\mu}\to hi^{-1}\partial/\partial x_\mu,\quad p_{y_\mu}\to hi^{-1}\partial/\partial y_\mu,\quad p_{z_\mu}\to hi^{-1}\partial/\partial z_\mu$$

所得的算子

$$H=-\sum_{\mu=1}^{f}h^2(2m_\mu)^{-1}(\partial^2/\partial x_\mu^2+\partial^2/\partial y_\mu^2+\partial^2/\partial z_\mu^2)+U(x_1,\cdots,z_f).$$

$\psi(x_1,\cdots,z_f)$ 确定了处于能量为 E 的定常状态的体系的状态，依照 M. Born，当体系处于該状态时，其 f 个基本粒子的位置落于 $3f$ 維位置坐标空間的区域 D 中的概率須与

❶ m_μ 是体系的第 μ 个基本粒子的质量；p_{x_μ}，p_{y_μ}，p_{z_μ} 是該基本粒子的动量在 x，y，z 方向的分量；U 是体系的位能。

$$\int\cdots\int_D |\psi(x_1, \cdots, z_f)|^2 dx_1\cdots dz_f$$

成比例。

因此，为了决定体系的所有可能的定常状态 ψ 以及对应于該定常状态的能級 E，不得不解 Hilbert 空間 $L_2(E^{3f})$ 中的特征値問題 $H\psi=E\psi$。但由于 H 是偏微分算子，不是有界的，所以对于它的定义域的考察，就有必要予以慎重的注意。如果适当地取 H 的定义域的話，那么从 H 満足对称性

$$(H\psi, \varphi)=(\psi, H\varphi), \quad (\psi, \varphi\in\mathfrak{D}(H))$$

的事实着手，可将 H 延拓成"自共軛算子"而根据自共軛算子的譜分解定理便能将特征値問題 $H\psi=E\psi$ 适当地定型化 (J. von Neumann❶, M. H. Stone)❷。我們首先要从有关加法算子的对称性的一般理論讲起。

§ 48 对称算子，閉算子及自共軛算子

以下专考虑从 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 到 $\mathfrak{H}$ 內的加法算子 T。

共軛算子 如間在 § 20 所示，当 $\mathfrak{D}(T)$ 在 $\mathfrak{H}$ 內稠密时，T 的共軛算子 (conjugate or adjoint operator) T^* 是由

$$(Tx, y)=(x, T^*y), \quad x\in\mathfrak{D}(T) \tag{48.1}$$

而定义的，这就是說，当考虑那种对于一切的 $x\in\mathfrak{D}(T)$ 能令 $(Tx,y)=(x, y^*)$ 成立的 $\mathfrak{H}$ 的点对 $\{y, y^*\}$ 的全体时，由于 $\mathfrak{D}(T)$ 在 $\mathfrak{H}$ 內是稠密的，y^* 必由 y 而唯一地确定。T^* 便是对于在这种点对 $\{y, y^*\}$ 中的 y 以 $T^*y=y^*$ 而定义的。

算子的延拓的定义 如果对于两个算子 T_1, T_2，条件

$$\mathfrak{D}(T_1)\subseteqq\mathfrak{D}(T_2)，且当 x\in\mathfrak{D}(T_1) 时 \quad T_1x=T_2x \tag{48.2}$$

成立的話，便称 T_2 为 T_1 的**延拓**，T_1 为 T_2 的**緊縮** (contraction)，并且写作 $T_1\subseteqq T_2$。

对称算子 若对算子 T 能够定义❸ T^* 而且有 $T\subseteqq T^*$，就称

---

❶ Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann., **102** (1929), 49～131.

❷ Linear transformations in Hilbert space, New York (1932).

❸ 换言之，$\mathfrak{D}(T)$ 在 $\mathfrak{H}$ 中稠密。——校者注

T 为对称算子，特别是 $T^*=T$ 的这种算子 T 称为**自共轭算子**。

例　在 §20 給出的坐标算子 $(x(t)\to t\cdot x(t))$ 及动量算子 $(x(t)\to i^{-1}x'(t))$ 都是自共轭算子。同样在 §20 給出的积分算子

$$x(t)\to\int_0^1 K(t,s)x(s)ds$$

当核 K 满足 $K(s,t)=\overline{K(t,s)}$ 时也是自共轭的。非自共轭的对称算子的例将于后面給出。

閉算子　有界算子 T，由于在 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}$ 上連續，自然具有下面的性質：

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果 }\{x_n\}\subseteq\mathfrak{D}(T)\text{ 且 s-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x,\ \text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=y\\ \text{存在的話，則 }x\in\mathfrak{D}(T)\text{ 且 }Tx=y\text{ 成立。}\end{array}\right\}\quad(48.3)$$

一般而論，对于（不一定是有界的，也不一定 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}$ 的）加法算子 T，当(48.3)滿足时，称 T 为**閉算子**❶。后面（定理 11.1）将指出，一个算子的共轭算子总是閉算子。

例 1　設 $\mathfrak{H}=L_2(0,1)$，又設 $\mathfrak{D}_1$ 表示在 $[0,1]$ 上絕对連續，$x(0)=x(1)=0$ 且 $x'(t)\in L_2(0,1)$ 的这种 $x(t)$ 的全体，那么使 $i^{-1}x'(t)$ 对应于 $x(t)\in\mathfrak{D}_1$ 的算子 T_1 是閉算子。

証明　設 $\{x_n(t)\}\subseteq\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}(T_1)$ 且 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}T_1x_n=y$。因为由 Schwarz 不等式有

$$|x_n(t)-x_m(t)|^2=\left|\int_0^t\{x_n'(t)-x_m'(t)\}dt\right|^2\leqslant\int_0^t dt\cdot\int_0^t|x_n'(t)-x_m'(t)|^2dt$$
$$\leqslant\|x_n'-x_m'\|,$$

所以 $\{x_n(t)\}$ 在 $[0,1]$ 一致收斂而且它的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$，由于 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，必等于 $x(t)$。因此 $x(0)=x(1)=0$ 是显然的。又因为由 Schwarz 不等式有

$$\left|\int_0^t y(t)dt\right|^2\leqslant\int_0^t dt\cdot\int_0^t|y(t)|^2dt<\infty,$$

所以 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上可积，令 $Y(t)=\int_0^t y(t)dt$，那么，和上面一样得到

$$|x_n(t)-iY(t)|^2=\left|\int_0^t\{x_n'(t)-iy(t)\}dt\right|^2\leqslant\int_0^t dt\cdot\int_0^t|x_n'(t)-iy(t)|^2dt$$
$$\leqslant\|T_1x_n-y\|^2,$$

---

❶ 和定理 8.3 系 2 那里所述的是同一定义。

而由 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} T_1 x_n = y$ 便得

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) = iY(t) = i\int_0^t y(t)\,dt.$$

从而就說明了 $x \in \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}(T_1)$ 且 $T_1 x = y$.

例2 設 $\mathfrak{H} = L_2(0,1)$,又設 $\mathfrak{D}_2$ 表示在 $[0,1]$ 上絕对連續且 $x'(t) \in L_2(0,1)$ 的 $x(t)$ 的全体,那么使 $i^{-1}x'(t)$ 对应于 $x(t) \in \mathfrak{D}_2$ 的算子 T_2 是閉算子。証明和例1相仿,T_2 显然是 T_1 的眞的延拓❶。

例3 設 $\mathfrak{H} = L_2(0,1)$,又設 $\mathfrak{D}_{3,\varphi}$ 表示在 $[0,1]$ 絕对連續,对某一 φ,$0 \leqslant \varphi < 2\pi$,滿足 $x(0) - e^{i\varphi}x(1) = 0$ 且 $x'(t) \in L_2(0,1)$ 的 $x(t)$ 的全体,那么,使 $i^{-1}x'(t)$ 对应于 $x(t) \in \mathfrak{D}_{3,\varphi}$ 的算子 $T_{3,\varphi}$ 是閉算子。証明和例1相仿,$T_{3,\varphi}$ 是 T_1 的眞的延拓,T_2 又是 $T_{3,\varphi}$ 的眞的延拓。

非自共轭对称算子的例 拿上面的例 T_1, T_2 来說,因为有 $T_2 = T_1^*$,所以 T_1 虽然是对称的,但不是自共轭的。

$T_1^* = T_2$ **的証明** 因为 $\mathfrak{D}(T_1)$ 显然在 $L_2(0,1)$ 内稠密,所以 T_1^* 是得以定义的。設 $y \in \mathfrak{D}(T_1^*)$, $T_1^* y = y^*$, $x \in \mathfrak{D}(T_1)$,則

$$\int_0^1 i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}\,dt.$$

右边經分部积分,并利用 $x(0) = x(1) = 0$ 后

$$= -\int_0^1 x'(t)\overline{Y^*(t)}\,dt,$$

但 $Y^*(t) = \int_0^t y^*(t)\,dt$. 因此,由于 $x(1) = \int_0^1 x'(t)\,dt = 0$,对于任意的常数 c,

当 $x \in \mathfrak{D}(T_1)$ 时 $\quad \int_0^1 x'(t)\{\overline{Y^*(t)} - \overline{i^{-1}y(t)} - \bar{c}\}\,dt = 0,$

但因对于任意的 $z(t) \in L_2(0,1)$,

$$Z(t) = \int_0^t z(t)\,dt - t\int_0^1 z(t)\,dt$$

是 $\in \mathfrak{D}(T_1)$ 的 $(Z(0) = Z(1) = 0)$,所以在上式中令 $x = Z$ 便得

$$\int_0^1 \left\{z(t) - \int_0^1 z(t)\,dt\right\}\{\overline{Y^*(t)} - \overline{i^{-1}y(t)} - \bar{c}\}\,dt = 0,$$

---

❶ $T_1 \subseteq T_2$ 且 $T_2 \neq T_1$.

从而当这样选取 c，使得 $\int_0^1 \{Y^*(t) - i^{-1}y(t) - c\} dt = 0$ 时，有

$$\int_0^1 z(t)\ \{\overline{Y^*(t)} - \overline{i^{-1}y(t)} - \bar{c}\} dt = 0,$$

由于 $z \in L_2(0, 1)$ 的任意性，便得

$$Y^*(t) = \int_0^t y^*(t) dt = i^{-1}y(t) + c,$$

这就是說 $y \in \mathfrak{D}(T_2)$ 且 $T_2 y = y^*$，从而 $T_1^* \subseteq T_2$. 反之，由分部积分易知 $T_2 \subseteq T_1^*$，故不能不 $T_1^* = T_2$. 　　証毕

关于 $T_{3,\varphi}$ 的自共軛性将在 §50 里討論。

定理 11.1 T^* 是閉算子。

証明　設 $\{x_n\} \subseteq \mathfrak{D}(T^*)$ 且 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} T^* x_n = y$. 由于內积的連續性，对于任意的 $z \in \mathfrak{D}(T)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} (Tz, x_n) = (Tz, x),$$

$$\lim_{n\to\infty} (Tz, x_n) = \lim_{n\to\infty} (z, T^* x_n) = (z, y),$$

因此 $(Tz, x) = (z, y)$，从而必 $x \in \mathfrak{D}(T^*)$ 且 $T^* x = y$.

系 1　如果 $T^{**} = (T^*)^*$ 存在，也就是說 $\mathfrak{D}(T^*)$ 在 $\mathfrak{H}$ 内稠密的話，那么 T^{**} 是 T 的閉延拓。

証明　T^{**} 是 T 的延拓，这由共軛算子的定义可以看出。又 T^{**} 为閉算子已如前定理所示。

注　也可証明，为了 T 具有閉延拓，T^{**} 的存在，亦即 $\mathfrak{D}(T^*)^a = \mathfrak{H}$ 是必要的❶。此外，也可証明，使 $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{H}$ 的閉算子 T 总是有界的❷。

系 2　对称算子 T 具有对称閉延拓。

証明　由 $T \subseteq T^*$ 可知 $T^* \supseteq (T^*)^* = T^{**}$. 由此又知

$$(T^*)^* = T^{**} \subseteq (T^{**})^*,$$

故 T^{**} 是对称的。T^{**} 是 T 的閉延拓已如系 1 所示。

---

❶ 吉田：位相解析 I（岩波），p. 158,

❷ 同上书 p. 193.

定理 11.2 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}$ 这样的对称算子 T 是有界自共軛算子，又有界对称算子 T 是自共軛的。

証明 首先注意关系

$$\|Tx\|=\sup_{\|y\|\leq 1}|(Tx, y)|. \tag{48.4}$$

右边$\leqslant$左边的事实由 $|(Tx,y)|\leqslant\|Tx\|\cdot\|y\|$可知。$Tx=0$时(48.4)是显然的，$Tx\neq 0$ 时，令 $y=Tx/\|Tx\|$ 便有 $|(Tx, y)|=\|Tx\|$，由此知左边$\leqslant$右边。

其次，由于 $T\subseteqq T^*$ 而有 $\mathfrak{D}(T)\subseteqq\mathfrak{D}(T^*)$。更因 $\mathfrak{D}(T)^a=\mathfrak{H}$，故 $\mathfrak{D}(T^*)^a=\mathfrak{H}$❶. 因此，由(48.4)，

$$p(x)=\|Tx\|=\sup_{\|y\|\leq 1, y\in\mathfrak{D}(T^*)}|(Tx, y)|$$

$$=\sup_{\|y\|\leq 1, y\in\mathfrak{D}(T^*)}|(x, T^*y)|,$$

从而 $p(x)$ 作为 x 的連續函数 $|(x, T^*y)|$ 的上确界是下半連續的，由定理 6.1 必存在正数 γ 使

$$p(x)\leqslant\gamma\|x\|, \quad x\in\mathfrak{H}$$

成立。

定理的最后部分由于 $T\subseteqq T^*$，$\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}$ 是显然的。

定理 11.3 如果自共軛的 T 具有逆算子 T^{-1}，那么 T^{-1} 也是自共軛的。

証明 如自共軛的 T 具有逆算子 T^{-1}，則 $\mathfrak{W}(T)=\mathfrak{D}(T^{-1})$ 是在 $\mathfrak{H}$ 内稠密的。因为假如不然的話，由定理 2.2 勢必存在属于$\mathfrak{W}(T)^\perp$ 的 $y\neq 0$，从而 $0=(Tx, y)=(x, 0)$，$x\in\mathfrak{D}(T)$，于是 $y\in\mathfrak{D}(T^*)$ 且 $Ty=0$，从而将导出 $y=T^{-1}Ty=T^{-1}0=0$ 的矛盾的緣故。

既然如此，便存在 $(T^{-1})^*$。由于一般地有事实：

$$\text{如果 } \mathfrak{D}(T)^a=\mathfrak{D}(T^{-1})^a=\mathfrak{H}, \text{ 則 } (T^{-1})^*=(T^*)^{-1}. \tag{48.5}$$

所以利用 $T=T^*$ 便得 $T^{-1}=(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

---

❶ 可以改成"更因 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{H}$，故 $\mathfrak{D}(T^*)=\mathfrak{H}$".——校者注

最后(48.5)的証明 如果 $x\in\mathfrak{D}(T)$, $y\in\mathfrak{D}((T^{-1})^*)$, 則

$$(x,y)=(T^{-1}Tx,\ y)=(Tx,\ (T^{-1})^*y),$$

从而 $(T^{-1})^*y\in\mathfrak{D}(T^*)$ 且 $T^*(T^{-1})^*y=y$; 其次,如果 $x\in\mathfrak{D}(T^{-1})$, $y\in\mathfrak{D}(T^*)$, 則

$$(x,\ y)=(TT^{-1}x,\ y)=(T^{-1}x,\ T^*y),$$

从而 $T^*y\in\mathfrak{D}((T^{-1})^*)$ 且 $(T^{-1})^*T^*y=y$. 因此 $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$.

系 适合$\mathfrak{W}(T)=\mathfrak{H}$ 的对称算子 T 是自共轭的。

証明 如果 $Tx=0$, 則得

$$0=(Tx,\ y)=(x,\ Ty),\ y\in\mathfrak{D}(T),$$

而由于 $\mathfrak{W}(T)=\mathfrak{H}$ 就不能不有 $x=0$. 所以 T^{-1} 是存在的,于是

$$\mathfrak{D}(T^{-1})=\mathfrak{W}(T)=\mathfrak{H},$$

且因 T^{-1} 显然是对称的,故由定理 11.2, T^{-1} 是自共轭的。从而由上面的定理, $T=(T^{-1})^{-1}$ 也是自共轭的。

如前所示,对称算子总可延拓为对称的閉算子,至于一般的算子却有下面的定理成立:

定理 11.4 加法算子 T 能延拓为閉算子 S 的充要条件是

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果 } \{x_n\}\subseteqq\mathfrak{D}(T) \text{ 且 } \underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, x_n=0,\ \underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, Tx_n=y \\ \text{存在的話,必然 } y=0.\end{array}\right\}\qquad(48.6)$$

証明(必要性) 由于 $Sx_n=Tx_n$ 及 S 为閉算子的假定,当然有

$$y=\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, Sx_n=S\cdot 0=0.$$

(充分性) 如果 $\{x_n\}\subseteqq\mathfrak{D}(T)$ 且 $\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, x_n=x$, $\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, Tx_n=y$ 存在的話,則 y 必然和强收斂于 x 的点列 $\{x_n\}$ 的取法无关。这是因为,設 $\{x'_n\}\subseteqq\mathfrak{D}(T)$ 且

$$\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, x'_n=x,\quad \underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, Tx'_n=z,$$

那么将有 $\{(x_n-x'_n)\}\subseteqq\mathfrak{D}(T)$ 且

$$\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\,(x_n-x'_n)=0,\quad \underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\, T(x_n-x'_n)=y-z,$$

从而由(48.6)必然得到 $y-z=0$。既然如此，对于如上的 x 令 $Sx=y$ 的算子 S 就唯一地确定了。对于 $x\in\mathfrak{D}(T)$，令 $x_n=x\,(n=1, 2, \cdots)$ 便知 $Sx=Tx$，也就是說 S 是 T 的延拓。又 S 的加法性也是容易看出的。S 为閉算子可如下証明：假定

$$\{z_n\}\subseteq\mathfrak{D}(S)\ 且\ \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} z_n=z,\ \ \operatorname{s-lim} Sz_n=w,$$

对于每个 z_n 自然可以选出 $x_n\in\mathfrak{D}(T)$ 使

$$\|x_n-z_n\|\leqslant n^{-1},\ \ \|Tx_n-Sz_n\|\leqslant n^{-1},$$

因此有

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} x_n=\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} z_n=z,\ \ \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} Tx_n=\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} Sz_n=w,$$

从而 $z\in\mathfrak{D}(S)$ 且 $Sz=w$。

注　§40 的引理可按照和上面定理相同的想法来証明。和在那里的引理 2 一样，如果把系数属于 $C^\infty(R)$ 的函数的偏微分算子 T 看做是从 $\mathfrak{D}^\infty(R)\subseteq L_2(R)$ 到 $L_2(R)$ 內的加法算子时，总可作出 T 的最小閉延拓，这点在偏微分方程的算子論的处理上是非常重要的。

§49 Cayley 变换

为了探討对称算子 H 的共軛算子 H^* 究竟是怎样从 H 延拓的(§50)，我們遵从 J. von Neumann 利用 Cayley 变换。这也是为了要把自共軛算子的譜分解归到酉算子的譜分解所不可缺的工具。

定理 11.5　如果 H 是对称的閉算子，那么

(i) 連續的逆算子 $(H+iI)^{-1}$ 存在，$U_H=(H-iI)(H+iI)^{-1}$ 是閉算子而且是等距的(isometric)：

对于 $y\in\mathfrak{D}(U_H)=\mathfrak{D}((H+iI)^{-1})$，$\|U_Hy\|=\|y\|$。

(ii) $(I-U_H)^{-1}$ 存在而 $H=i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}$。因此，特别地 $\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{W}(I-U_H)$，从而 $(\mathfrak{W}(I-U_H))^a=\mathfrak{H}$。

这 U_H 称为 H 的 **Cayley 变换**。

証明 (i) 如 $x\in\mathfrak{D}(H)$，則

$$((H\pm iI)x,\ (H\pm iI)x)$$
$$=(Hx,\ Hx)\pm(Hx,\ ix)\pm(ix,\ Hx)+(x,\ x).$$

由于 H 是对称的，故

$$(Hx,\ ix)=-i(Hx,\ x)=-i(x,\ Hx)=-(ix,\ Hx),$$

而有

$$\|(H\pm iI)x\|^2=\|Hx\|^2+\|x\|^2. \tag{49.1}$$

因此当 $(H+iI)x=0$ 时必然 $x=0$，由定理1.6与

$$\|(H+iI)x\|\geqslant\|x\|$$

便知逆算子 $(H+iI)^{-1}$ 存在而且是連續的。令 $(H+iI)x=y$，則

$$U_Hy=(H-iI)(H+iI)^{-1}y=(H-iI)x,$$

由于(49.1)就得 $\|U_Hy\|=\|y\|$.

U_H 为閉算子的証明 令 $(H+iI)x_n=y_n$，$(H-iI)x_n=z_n$ 且設 $y_n\to y$，$z_n\to z$. 因为由(49.1)有

$$\|y_n-y_m\|^2=\|H(x_n-x_m)\|^2+\|x_n-x_m\|^2,$$

所以当 $n,\ m\to\infty$ 时 $(x_n-x_m)\to0$，$H(x_n-x_m)\to0$，而由于 H 是閉算子，必存在 $x\in\mathfrak{D}(H)$ 使得 $x_n\to x$，$Hx_n\to Hx$. 因此

$$(H+iI)x_n\to y=(H+iI)x,\ (H-iI)x_n\to z=(H-iI)x,$$

从而 $U_Hy=z$.

(ii) 由 $y=(H+iI)x$，$U_Hy=(H-iI)x$ 得到

$$2^{-1}(I-U_H)y=ix \text{ 及 } 2^{-1}(I+U_H)y=Hx.$$

因此当 $(I-U_H)y=0$ 时必然 $x=0$，故 $(I+U_H)y=2Hx=0$，从而

$$y=2^{-1}\{(I-U_H)y+(I+U_H)y\}=0.$$

于是逆算子 $(I-U_H)^{-1}$ 存在。通过和上面相同的計算得

$$Hx=2^{-1}(I+U_H)y=i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}x,$$

也就是 $H=i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}$.

定理 11.6 設 U 为等距閉算子，且 $\mathfrak{W}(I-U)^a=\mathfrak{H}$，那么以 U

为其 Cayley 变换的对称算子 H 必然存在而且是唯一的。

証明 首先指出逆算子 $(I-U)^{-1}$ 的存在。为此只須証明由 $(I-U)y=0$ 可导出 $y=0$ 好了。設 z 为 $\mathfrak{W}(I-U)$ 的元，則适合 $z=(I-U)w$ 的 $w\in\mathfrak{D}(U)$ 必存在，由 U 的等距性与 $(I-U)y=0$ 得

$$(y, z)=(y, w)-(y, Uw)=(Uy, Uw)-(y, Uw)$$
$$=(Uy-y, Uw)=0.$$

这是因为，由于

$$(f, g)=\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2-\left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{f+ig}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{f-ig}{2}\right\|^2 \tag{49.2}$$

成立（直接計算可以驗知），当 U 为等距时必然有 $(f, g)=(Uf, Ug)$ 的緣故。既如此，$(I-U)y=0$ 这样的 y 便和 $\mathfrak{W}(I-U)$ 正交，而由于 $\mathfrak{W}(I-U)^a=\mathfrak{H}$ 的假定，必满足 $y=0$，結果就說明了 $(I-U)^{-1}$ 的存在。

令 $H=i(I+U)(I-U)^{-1}$，那么 H 的 Cayley 变换便将是 U。首先証明 H 的对称性。設 x, y 是 $\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{W}(I-U)$ 中的元，并令 $x=(I-U)u$, $y=(I-U)w$，那么由于 $(Uu, Uw)=(u, w)$，

$$(Hx, y)=(i(I+U)u,\ (I-U)w)$$
$$=i\{(Uu, w)-(u, Uw)\}$$
$$=((I-U)u,\ i(I+U)w)=(x, Hy).$$

其次証明 $U_H=U$。对于 $x=(I-U)u$，由于

$$Hx=i(I+U)(I-U)^{-1}(I-U)u=i(I+U)u,$$

有

$$(H+iI)x=2iu,\quad (H-iI)x=2iUu.$$

因此 $\mathfrak{D}(U_H)$ 乃是由 $2iu$, $u\in\mathfrak{D}(U)$ 所成，这就是說 $\mathfrak{D}(U_H)=\mathfrak{D}(U)$，且因 $U_H(2iu)=2iUu=U(2iu)$ 成立而得 $U_H=U$。

至于 H 为閉算子可由 H 为将 $(I-U)u$ 映照于 $i(I+U)u$ 的算子而得知。即設 $(I-U)u_n$ 与 $i(I+U)u_n$ 的双方都收斂的話，則 u_n 与 Uu_n 的双方都将收斂，而由于 U 是閉算子，得

$$u_n\to u,\ (I-U)u_n\to(I-U)u,\ i(I-U)u_n\to i(I-U)u,$$

从而 $(I-U)u\in\mathfrak{D}(H)$ 且 $H(I-U)u=i(I-U)u$.

注　我們知道对称算子 T 具有对称的閉延拓 T^{**}. 为了要找 T^{**} 的閉延拓中的对称者 H，如上面两定理所示，可先求 T^{**} 的 Cayley 变换的各种閉延拓中等距的而且滿足 $\mathfrak{W}(I-U)^a=\mathfrak{H}$ 的算子 U，然后再令 $H=i(I+U)\cdot(I-U)^{-1}$ 好了。

§50　对称算子的共軛算子的构造

标題所示的乃是

定理 11.7　設对称算子 H 的 Cayley 变换为 U_H，則

(i)　$\mathfrak{H}_H^+=\mathfrak{D}(U_H)^\perp$ 与 $H^*x=ix$ 的解 x 的全体一致；

(ii)　$\mathfrak{H}_H^-=\mathfrak{W}(U_H)^\perp$ 与 $H^*x=-ix$ 的解 x 的全体一致；

(iii)　$\mathfrak{H}_H^+$ 与 $\mathfrak{D}(H)$ 的公共元只有 0. 同样 $\mathfrak{H}_H^-$ 与 $\mathfrak{D}(H)$ 的公共元只有 0；

(iv)　$\mathfrak{D}(H^*)$ 的元 x 可唯一地分解为

$$x=x_0+x_1+x_2\quad(x_0\in\mathfrak{D}(H),\ x_1\in\mathfrak{H}_H^+,\ x_2\in\mathfrak{H}_H^-)\tag{50.1}$$

的形状，从而

$$H^*x=Hx_0+ix_1-ix_2;\tag{50.2}$$

(v)　形如上面(50.1)的 x 皆属于 $\mathfrak{D}(H^*)$.

証明　(i)　設 $x\in\mathfrak{H}_H^+=\mathfrak{D}(U_H)^\perp=\mathfrak{D}((H+iI)^{-1})^\perp$，则对于一切的 $y\in\mathfrak{D}(H)$，有 $x\perp(H+iI)y$，亦即 $((H+iI)y,x)=0$. 因此，对于一切的 $y\in\mathfrak{D}(H)$ 有 $(Hy,x)=(y,ix)$，从而得到 $x\in\mathfrak{D}(H^*)$ 且 $H^*x=ix$.

(ii)　可与 (i) 同样証明。

(iii)　設 $x\in\mathfrak{H}_H^+$，則 $H^*x=ix$. 如果 x 又属于 $\mathfrak{D}(H)$，那么，

由于 $Hx=H^*x$，有 $(Hx, x)=(ix, x)=i\|x\|^2$。此式和由 H 的对称性所得的 $(Hx, x)=(x, Hx)=\overline{(Hx, x)}$ 結合起来必然得到 $x=0$。因此 $\mathfrak{H}_H^+$ 与 $\mathfrak{D}(H)$ 的公共元只由 0 組成。同样可知 $\mathfrak{H}_H^-$ 与 $\mathfrak{D}(H)$ 的公共元只由 0 組成。

(iv) 首先 $\mathfrak{D}(U_H)$，$\mathfrak{W}(U_H)$ 是閉子空間❶。比如就 $\mathfrak{D}(U_H)=\mathfrak{W}(H+iI)$ 来說，这可如下看出。設 $(H+iI)x_n\to y$，那么仿照前面証明 U_H 是閉算子的方法（定理 11.5），可知存在 $x\in\mathfrak{D}(H)$，使得 $x_n\to x$ 且 $(H+iI)x_n\to y=(H+iI)x$。

其次，考慮 $(H^*+iI)x$ 投向互相正交的閉子空間 $\mathfrak{D}(U_H)$ 和 $\mathfrak{H}_H^+=\mathfrak{D}(U_H)^\perp$ 的射影，即

$$(H^*+iI)x=(H+iI)x_0+x' \quad (x_0\in\mathfrak{D}(H),\ x'\in\mathfrak{H}_H^+).$$

但 $(H+iI)x_0=(H^*+iI)x_0$。又由于 $x'\in\mathfrak{H}_H^+$，得到 $H^*x'=ix'$，因此有

$$x'=(H^*+iI)x_1,\ x_1=(2i)^{-1}x'\in\mathfrak{H}_H^+.$$

于是
$$(H^*+iI)x=(H^*+iI)x_0+(H^*+iI)x_1$$
$$(x_0\in\mathfrak{D}(H),\ x_1\in\mathfrak{H}_H^+),$$

从而
$$H^*(x-x_0-x_1)=-i(x-x_0-x_1),$$

可見 $(x-x_0-x_1)\in\mathfrak{H}_H^-$，这就是(50.1)。

分解(50.1)的唯一性的証明　只須指出，設

$$x_0+x_1+x_2=0 \quad (x_0\in\mathfrak{D}(H),\ x_1\in\mathfrak{H}_H^+,\ x_2\in\mathfrak{H}_H^-)$$

时可推得 $x_0=x_1=x_2=0$ 就可以了。事实上，由于 $H^*x_0=Hx_0$，$H^*x_1=ix_1$，$H^*x_2=-ix_2$，有

$$(H^*+iI)0=(H^*+iI)(x_0+x_1+x_2)=0$$
$$=(H+iI)x_0+2ix_1,$$

---

❶ 事实上，一般的閉等距算子 U 的定义域 $\mathfrak{D}(U)$ 和值域 $\mathfrak{W}(U)$ 都是閉的，因为若 $x_n\in\mathfrak{D}(U)$，$x_n\to x$，則由 U 的等距性 $\{Ux_n\}$ 是空間的基本点列，必有 y 使 $Ux_n\to y$。由 U 是閉算子，知道 $x\in\mathfrak{D}(U)$，故 $\mathfrak{D}(U)$ 为閉集，类似地 $\mathfrak{W}(U)$ 是閉的。——校者注

因此，鉴于 $\mathfrak{H}$ 的分解为 $\mathfrak{D}(U_H)=\mathfrak{W}(H+iI)$ 与 $\mathfrak{H}_H^+=\mathfrak{D}(U_H)^\perp$ 的唯一性，更有 $(H+iI)x_0=0$，$2ix_1=0$。因为 $(H+iI)^{-1}$ 的存在，由 $(H+iI)x_0=0$ 得 $x_0=0$。这样一来，$x_0=x_1=0$，从而

$$x_2=0-x_0-x_1=0.$$ 証毕

由此得

定理 11.8　对称闭算子 H 为自共轭的充要条件是，H 的 Cayley 变换 U_H 将 $\mathfrak{H}$ 一对一且等距的映照到整个 $\mathfrak{H}$，也就是説 U_H 为酉算子。

証明　依前定理，$\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{D}(H^*)$ 的充要条件是 $\mathfrak{H}_H^+$ 与 $\mathfrak{H}_H^-$ 都由 0 矢量組成。由于該条件等同于 $\mathfrak{D}(U_H)=\mathfrak{W}(U_H)=\mathfrak{H}$，所以再由 Cayley 变换 U_H 的等距性便得到定理。

作为定理 11.7 及定理 11.8 的应用，有

§ 48 中算子 T_1 的自共轭延拓的确定　如果自共轭算子 S 是 T_1 的延拓，則对于某个 θ' $(0\leqslant\theta'<2\pi)$，

$$S=T_{3,\theta'}.$$

証明　由定理 11.8，U_S 是酉算子；又由定理 11.5，11.6，U_S 必为 U_{T_1} 的延拓，于是，設

$$\mathfrak{H}\ni x=x_0+x_1,\ x_0\in\mathfrak{D}(U_{T_1}),\ x_1=\mathfrak{D}(U_{T_1})^\perp=\mathfrak{H}_{T_1}^+$$

时（因 U_{T_1} 为閉等距算子，故 $\mathfrak{D}(U_{T_1})$ 为閉子空間），由于

$$0=(x_0,\ x_1)=(U_Sx_0,\ U_Sx_1)=(U_{T_1}x_0,\ U_Sx_1),$$

必然有

$$U_Sx=U_Sx_0+U_Sx_1=U_{T_1}x_0+U_Sx_1,$$

$$U_Sx_1\in\mathfrak{W}(U_{T_1})^\perp=\mathfrak{H}_{T_1}^-.$$

但因 $T_1^*=T_2$（如在 § 48 所示），故由定理 11.7，

$$T_2x_1=T_1^*x_1=ix_1,\quad T_2(U_Sx_1)=T_1^*(U_Sx_1)=-i(U_Sx_1)$$

成立，而由于 T_2 为 $i^{-1}d/dt$，故存在常数 c_1，c_2，使

$$x_1(t)=c_1e^{-t},\quad (U_Sx_1)(t)=c_2e^t.$$

于是由 U_S 的等距性有

$$\int_0^1 |c_1e^{-t}|^2dt=\int_0^1 |c_2e^t|^2dt,$$

而适合 $c_2=c_1e^{-1+i\theta}$ 的 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 得以确定，也就是

$$U_S(c_1e^{-t})=c_1e^{-1+i\theta}e^t.$$

但因依定理 11.6，$S=i(I+U_S)(I-U_S)^{-1}$，故 $\mathfrak{D}(S)$ 乃是由形如

$$\begin{aligned}(I-U_S)x&=(I-U_S)(x_0+c_1e^{-t})\\&=(I-U_S)x_0+c_1(I-U_S)e^{-t}\\&=(I-U_{T_1})x_0+c_1(e^{-t}-e^{-1+i\theta}e^t),\ x_0\in\mathfrak{D}(U_{T_1})\end{aligned}$$

的元素所組成。由定理 11.6，上式右边第一項 $(I-U_{T_1})x_0\in\mathfrak{D}(T_1)$，因此 $y_0=(I-U_{T_1})x_0$ 滿足"边界条件" $y_0(0)=y_0(1)=0$．由此可知构成 $\mathfrak{D}(S)$ 的 $y=(I-U_S)x$ 滿足"边界条件"

$$y(0)-\frac{e-e^{i\theta}}{1-ee^{i\theta}}y(1)=0. \tag{50.3}$$

但因

$$w=\frac{e-z}{1-ez}$$

将 z 平面上的单位圓 $|z|\leqslant1$ 一对一且共形地映照到 w 平面的单位圓 $|w|\leqslant1$，所以对于每个 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$，适合

$$\frac{e-e^{i\theta}}{1-ee^{i\theta}}=e^{i\theta'}\quad(0\leqslant\theta'<2\pi)$$

的 θ' 唯一地被确定，因此 $\mathfrak{D}(S)\subseteq\mathfrak{D}(T_{3,\theta'})$．

另一方面，如前节所示，有 $T_1\subseteq T_1^*=T_2$，所以鉴于 $T_1\subseteq S$，$S^*=S$ 而有 $T_1^*=T_2\supseteq S^*=S$，再由 $T_2\supseteq T_{3,\theta'}$ 最后遂得 $S\subseteq T_{3,\theta'}$．

反之，有 $T_{3,\theta'}\subseteq S$ 可如下証明：設 $x\in\mathfrak{D}(T_{3,\theta'})$，令

$$z(t)=x(t)-\frac{ex(1)}{1-ee^{i\theta}}(e^{-t}-e^{-1+i\theta}e^t).$$

由于

$$x(0)-\frac{e-e^{i\theta}}{1-ee^{i\theta}}x(1)=0,$$

$z(t)$ 滿足 $z(0)=z(1)=0$，所以 $z\in\mathfrak{D}(T_1)$．从而有

$$x(t)=z(t)+\frac{ex(1)}{1-ee^{i\theta}}(e^{-t}-e^{-1+i\theta}e^{t}).$$

右边第2项，如前所示，$\in\mathfrak{W}(I-U_S)=\mathfrak{D}(S)$。又因 $T_1\subseteqq S$，而 $z\in\mathfrak{D}(T_1)$ 也属于 $\mathfrak{D}(S)$，故結果得 $x\in\mathfrak{D}(S)$。根据这个事实和 $S\subseteqq T_2$ 就不能不有 $T_{3,\theta'}\subseteqq S$。

注　T_2 显然不是对称的。事实上，对于 $x, y\in\mathfrak{D}(T_2)$，为了要

$$\int_0^1 i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}\,dt=\int_0^1 x(t)\cdot\overline{i^{-1}y'(t)}\,dt$$

成立，由分部积分可以看出，必須

$$x(1)\overline{y(1)}-x(0)\overline{y(0)}=0$$

成立。对于上述等式只要 $x(t)$，$y(t)$ 同时滿足“边界条件”

$$x(0)-e^{i\theta'}x(1)=0,\quad y(0)-e^{i\theta'}y(1)=0$$

就行了。在这种边界条件之下将 $T_2=i^{-1}d/dt$ 紧縮所得的 $T_{3,\theta'}$ 不仅成了对称的，而且 $T_{3,\theta'}$ 还成了在“边界条件”

$$x(0)=x(1)=0$$

之下将 $T_2=i^{-1}d/dt$ 紧縮所得的对称算子 T_1 的自共轭延拓。

在§20里所述的 $L_2(-\infty,\infty)$ 中的坐标算子 $t\cdot$ 或者动量算子 $i^{-1}d/dt$ 的定义域都可看做是在 $t=\infty$, $t=-\infty$ 处规定了“边界条件”的。比如就 $t\cdot$ 来說，这种 $x(t)\in L_2(-\infty,\infty)$，$tx(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ 的算子 $t\cdot$，属于其定义域的函数 $x(t)$ 算是规定为在 $t=\infty$, $t=-\infty$ 处成为0的。

一般而論，对于添加某边界条件就可变为对称的算子，是否存在能使該算子成为自共軛的边界条件呢？又这种的边界条件应如何来求呢？以上問題构成算子論中主題之一，因为下面我們将看到，在对称算子之中，譜分解只对自共軛算子是可能的，而由于譜分解定理，对应于該算子的特征值問題是完全可解的。

§51　单位分解

从有限維的 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}=l_2(m)$ 到 $l_2(m)$ 内的对称算子

H，由定理 11.2 是自共軛且有界的，并且如果象在 § 20 所示那样表为 m 維矩陣 (h_{ij}) 时，它的对称性表現为 $h_{ij}=\bar{h}_{ji}$。如所熟知，对于这种 H，特征值問題完全可解，也就是說，存在 m 个实数

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m \tag{51.1}$$

与就范正交的完全系 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$ 使

$$Hx^{(i)}=\lambda_i x^{(i)} \tag{51.2}$$

成立。(51.1) 中的等号，例如

$$\lambda_1<\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4<\lambda_5\leqslant\cdots$$

意味着 λ_2 是具有 3 重的重复度 (multiplicity) 的特征值，亦即与 $\lambda=\lambda_2$ 相应的 H 的特征空間維数为 3。由于 $\{x^{(i)}\}_{i=1,\cdots,m}$ 为完全系，任意的 $x\in\mathfrak{H}=l_2(m)$ 可表为

$$x=\sum_{i=1}^{m}\xi_i x^{(i)},$$

如果对于 $-\infty<\lambda<\infty$ 的任意的 λ，用

$$\left.\begin{aligned}&E(\lambda)x=\sum_{i=1}^{k}\xi_i x^{(i)},\\&k\text{ 为满足 }\lambda_i\leqslant\lambda\text{ 的最大的 }i\end{aligned}\right\} \tag{51.3}$$

来定义 $E(\lambda)$ 时，$E(\lambda)$ 是射影算子，且满足

$$E(\lambda)E(\mu)=E(\min(\lambda,\mu)), \tag{51.4}$$

$$E(\lambda+0)=E(\lambda)\text{ ❶ (右連續性)}, \tag{51.5}$$

$$E(-\infty)=0,\ E(+\infty)=I\text{ ❷}. \tag{51.6}$$

再設 $y=\sum_{i=1}^{m}\eta_i x^{(i)}$，那么由于 $Hx=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i Hx^{(i)}=\sum\lambda_i\xi_i x^{(i)}$ 及 $\{x^{(i)}\}$ 的就范正交性有

$$(Hx, y)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\xi_i\bar{\eta}_i=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x, y) \tag{51.7}$$

---

❶ 对于一切的 $x\in\mathfrak{H}$，$\text{s-}\lim_{\mu\downarrow\lambda}E(\mu)x=E(\lambda+0)x=E(\lambda)x$。

❷ 对于一切的 $x\in\mathfrak{H}$，$\text{s-}\lim_{\lambda\downarrow-\infty}E(\lambda)x=E(-\infty)x=0$，$\text{s-}\lim_{\lambda\uparrow\infty}E(\lambda)x=E(\infty)x=x$。

成立。$E(\lambda+0)=E(\lambda)\neq E(\lambda-0)$ ❶的这种 λ，也就是使 $E(\lambda)$ 不連續的 λ 是 H 的特征值 $(=\lambda_i)$，而且

$$对于 \sum_{i=1}^{m}\xi_i x^{(i)},\ (E(\lambda_i)-E(\lambda_i-0))x=\sum_{\lambda_j=\lambda_i}\xi_j x^{(j)} \tag{51.8}$$

成立，这就是說 $(E(\lambda_i)-E(\lambda_i-0))$ 是相应于特征值 λ_i 的特征空間的射影。

这样一来，H 的特征值問題将由满足 (51.4) ~ (51.7) 的射影算子的系 $\{E(\lambda)\}$ 的求得而完全得到解决。将这办法推广到无限維的 Hilbert 空間，便得到自共轭算子的譜分解定理。为了叙述它們須先有一些准备。

定理 11.9 如果 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 的射影算子的系

$$\{E(\lambda)\}_{-\infty<\lambda<\infty}$$

满足 (51.4) 的話，那么上述射影算子

$$E(\lambda+0),\ E(\lambda-0),\ E(-\infty),\ E(+\infty)$$

是可以定义的。

証明 比如設 $\lambda_n\uparrow\lambda$，亦即 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$，那么我們要指出，存在射影算子 $E(\lambda-0)$，使 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty}E(\lambda_n)x=E(\lambda-0)x$，并且 $E(\lambda-0)$ 和 $\lambda_n\uparrow\lambda$ 的数列 $\{\lambda_n\}$ 的选法无关。

因为有界算子 $E(\alpha,\beta]=E(\beta)-E(\alpha)$ 满足

$$E(\alpha,\beta]^*=E(\alpha,\beta],\quad E(\alpha,\beta]^2=E(\alpha,\beta],$$

所以是射影算子。于是当 $m>n$ 时，

$$E(\lambda_n,\lambda_m]=E(\lambda_m)-E(\lambda_n)=\sum_{j=n}^{m-1}E(\lambda_j,\lambda_{j+1}]$$

的右边各项每一个都是射影算子，而且由于 (51.4)，它們满足正交条件

$$E(\lambda_j,\lambda_{j+1}]\cdot E(\lambda_k,\lambda_{k+1}]=0\quad (j\neq k\ 时)。\tag{51.9}$$

❶ 对于一切的 $x\in\mathfrak{H}$，$E(\lambda-0)x=\text{s-}\lim\limits_{\mu\uparrow\lambda}E(\mu)x$.

于是有

$$\|x\|^2 \geqslant \|E(\lambda_n, \lambda_m]x\|^2 = \sum_{j=n}^{m-1} \|E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x\|^2, \qquad (51.10)$$

而右边当 $m\to\infty$ 时收斂,从而

$$\lim_{j>i;\, i\to\infty} \sum_{k=i}^{j-1} \|E(\lambda_k, \lambda_{k+1}]x\|^2 = \lim_{j>i;\, i\to\infty} \|E(\lambda_i, \lambda_j]x\|^2 = 0.$$

亦即可見 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} E(\lambda_n)x$ 的存在。設另有 $\tau_n\uparrow\lambda$,那么令 $\{\sigma_n\}$ 表示将 $\{\lambda_n\}$ 和 $\{\tau_n\}$ 放在一起按单調增大排列的数列时,有

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} E(\sigma_n)x = \text{s-}\lim_{n\to\infty} E(\lambda_n)x = \text{s-}\lim_{n\to\infty} E(\tau_n)x,$$

由此可見 $E(\lambda-0)$ 和 $\lambda_n\uparrow\lambda$ 的数列 $\{\lambda_n\}$ 的选法无关。

既如此,$\text{s-}\lim\limits_{\mu\uparrow\lambda} E(\mu)x = E(\lambda-0)$ 这样的算子 $E(\lambda-0)$ 便可以定义,作为有界算子的强极限 $E(\lambda-0)$ 也是有界的(依共鳴定理),又因为它和各 $E(\mu)$ 一样,滿足

$$E(\lambda-0)^* = E(\lambda-0), \quad E(\lambda-0)^2 = E(\lambda-0),$$

所以 $E(\lambda-0)$ 是射影算子。 証毕

单位分解的定义 当射影算子的系 $\{E(\lambda)\}_{-\infty<\lambda<\infty}$ 滿足 (51.4) ~ (51.6) 时,$\{E(\lambda)\}$ 称为**单位分解** (resolution of the identity)。

例 設 $\mathfrak{H} = L_2(-\infty, \infty)$,如果凭

$$\left.\begin{aligned} &t>\lambda \text{ 时}, \ E(\lambda)x(t) = 0, \\ &t\leqslant\lambda \text{ 时}, \ E(\lambda)x(t) = x(t) \end{aligned}\right\} \qquad (51.11)$$

定义 $E(\lambda)$ 的話,那么 $\{E(\lambda)\}$ 便是单位分解。由

$$\|(E(\mu) - E(\lambda))x\|^2 = \int_\lambda^\mu |x(t)|^2 dt, \quad \mu>\lambda,$$

可知 (51.5) 成立。

定理 11.10 如果 $\{E(\lambda)\}$ 是单位分解,那么对于任意的 x, y,λ 的函数 $(E(\lambda)x, y)$ 的实部和虚部都是有界变差的。

証明 設 $-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = \infty$。因为 $E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ 是射影,所以

$$\sum_{j=0}^{n-1} |(E(\lambda_{j+1})x, y) - (E(\lambda_j)x, y)|$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} |(E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x, y)|$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x, E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]y)$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \|E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x\| \cdot \|E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]y\|$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=0}^{n-1} \|E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} \|E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]y\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\|E(\lambda_0, \lambda_n]x\|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\|E(\lambda_0, \lambda_n]y\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{由}(51.10))$$

$$\leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

定理 11.11 設 $x \in \mathfrak{H}$, $\phi(\lambda)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的复值連續函数，我們照下面那样来定义

$$\int_\alpha^\beta \phi(\lambda) dE(\lambda) x \quad (-\infty < \alpha < \beta < \infty).$$

設将 $[\alpha, \beta]$ 分割为 $\alpha = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = \beta$, 并从各子区間分别选出任意的 λ'_j 而作近似和

$$\sum_{j=1}^{n-1} \phi(\lambda'_j) E(\lambda_j, \lambda_{j+1}] x,$$

那么，当分割如此趋細，使 $\max_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \to 0$ 时，上面的和必强收斂于一定的元素，它和分割方法及 λ'_j 的选法无关。我們就把这个强极限作为上面的积分。再者如果下式右边存在的話，定义

$$\int_\alpha^\infty \phi(\lambda) dE(\lambda) x = \operatorname*{s-lim}_{\beta \uparrow \infty} \int_\alpha^\beta \phi(\lambda) dE(\lambda) x.$$

同样，也可定义

$$\int_{-\infty}^\beta \phi(\lambda) dE(\lambda) x, \quad \int_{-\infty}^\infty \phi(\lambda) dE(\lambda) x.$$

証明 $\phi(\lambda)$ 在有限閉区間 $[\alpha, \beta]$ 一致連續，从而对于任意的 $\varepsilon > 0$, 可确定 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当

$$\lambda', \lambda'' \in [\alpha, \beta] \text{ 及 } |\lambda' - \lambda''| < \delta(\varepsilon) \text{时},$$

$$|\phi(\lambda')-\phi(\lambda'')|<\varepsilon$$

成立。把两个分割

$$\alpha=\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n=\beta, \quad \max_j|\lambda_{j-1}-\lambda_j|<\delta,$$

$$\alpha=\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_m=\beta, \quad \max_k|\mu_{k+1}-\mu_k|<\delta$$

重合起来的分割記为

$$\alpha=\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_p=\beta \quad (p\leqslant m+n),$$

而 $\mu_k'\in[\mu_k, \mu_{k+1}]$，則得

$$\sum_j\phi(\lambda_j')E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x-\sum_k\phi(\mu_k')E(\mu_k, \mu_{k+1}]x$$

$$=\sum_s\varepsilon_sE(\nu_s, \nu_{s+1}]x, \quad |\varepsilon_s|\leqslant 2\varepsilon.$$

这是因为包含 $(\nu_s, \nu_{s+1}]$ 的区間 $(\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ 中的点与同样包含 $(\nu_s, \nu_{s+1}]$ 的区間 $(\mu_k, \mu_{k+1}]$ 中的点之間的距离 $\leqslant 2\delta$ 的緣故。于是和得到(51.10)一样，

$$\Big\|\sum_j\phi(\lambda_j')E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x-\sum_k\phi(\mu_k')E(\mu_k, \mu_{k+1}]x\Big\|^2$$

$$\leqslant 4\varepsilon^2\Big\|\sum_s E(\nu_s, \nu_{s+1}]x\Big\|^2=4\varepsilon^2\|E(\alpha, \beta]x\|^2\leqslant 4\varepsilon^2\|x\|^2.$$

定理 11.12 对于 $x\in\mathfrak{H}$，下面三个条件是等价的：

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)dE(\lambda)x$ 存在，

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2<\infty$，

(iii) $F(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d(E(\lambda)y, x)$ 为有界加法泛函。

証明 因为 $\|E(\lambda)x\|^2=(E(\lambda)x, x)$，$(E(\lambda)y, x)$ 作为 λ 的函数是有界变差的，故連續函数 $\phi(\lambda)$ 的 Riemann-Stieltjes 式积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d(E(\lambda)y, x)$$

的意义是不待說明的。

(i)→(iii)的証明　y 与 $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)dE(\lambda)x$ 的近似和所作的内

积成为 y 的有界泛函。因为 $(y, E(\lambda)x)=(E(\lambda)y, x)$，作为有界泛函的极限的 $F(y)$，依共鳴定理，也成为有界泛函。

(iii)→(ii) 的証明　令 $E(\alpha,\beta]$ 作用于 $y=\int_\alpha^\beta \overline{\phi(\lambda)}dE(\lambda)x$ 的近似和，再取强极限，易知 $y=E(\alpha, \beta]y$. 于是利用 (51.4)，

$$\begin{aligned}\overline{F(y)}&=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\phi(\lambda)}d(E(\lambda)x, y)\\&=\lim_{\alpha'\to-\infty,\beta'\to\infty}\int_{\alpha'}^{\beta'}\overline{\phi(\lambda)}d(E(\lambda)x, y)\\&=\lim\int_{\alpha'}^{\beta'}\overline{\phi(\lambda)}d(E(\lambda)x, E(\alpha, \beta]y)\\&=\lim\int_{\alpha'}^{\beta'}\overline{\phi(\lambda)}d(E(\alpha, \beta]E(\lambda)x, y)\\&=\int_\alpha^\beta\overline{\phi(\lambda)}d(E(\lambda)x, y)=\|y\|^2,\end{aligned}$$

从而 $\|y\|^2\leqslant\|F\|\cdot\|y\|$ 即 $\|y\|\leqslant\|F\|$. 可是另一方面，

$$\|y\|^2=\left\|\int_\alpha^\beta\overline{\phi(\lambda)}dE(\lambda)x\right\|^2=\int_\alpha^\beta|\phi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2.$$

这只须将 $y=\int_\alpha^\beta\overline{\phi(\lambda)}dE(\lambda)x$ 换成近似和，象推导 (51.10) 时一样計算，再取极限即可得到。因此

$$\int_\alpha^\beta|\phi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2\leqslant\|F\|^2,$$

在此令 $\alpha\to-\infty$, $\beta\to\infty$ 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2\leqslant\|F\|^2<\infty.$$

(ii)→(i) 的証明　因为和上面一样，当 $\alpha'<\alpha<\beta<\beta'$ 时，得

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\alpha'}^{\beta'}\phi(\lambda)dE(\lambda)x-\int_\alpha^\beta\phi(\lambda)dE(\lambda)x\right\|^2&=\left\|\int_{\alpha'}^{\alpha}+\int_\beta^{\beta'}\right\|^2\\&=\int_{\alpha'}^{\alpha}|\phi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2+\int_\beta^{\beta'}|\phi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2,\end{aligned}$$

故由 (ii) 可导出 (i)。

定理 11.13 设 $\phi(\lambda)$ 为实值連續函数，这时对于

$$\mathfrak{D}=\left\{x;\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2<\infty\right\} \tag{51.12}$$

中的 x 与任意的 $y\in\mathfrak{H}$，令

$$(Hx, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d(E(\lambda)x, y), \tag{51.13}$$

凭此便可定义一个自共軛算子 H，以 $\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{D}$ 为其定义域。这时还成立着 $HE(\lambda)\supseteq E(\lambda)H$。

証明 对于 $\mathfrak{D}$ 中的 x，由前定理可以知道，凭(51.13)确实定义[1]了一个加法算子 H. 其次，对于任意的 $z\in\mathfrak{H}$ 与 $\varepsilon>0$，由于(51.6)，存在有限的 $\alpha<\beta$，使得 $\|z-E(\alpha,\beta]z\|<\varepsilon$. 又由(51.4)有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}&|\phi(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)E(\alpha,\beta]z\|^2\\&=\int_{\alpha}^{\beta}|\phi(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)z\|^2<\infty,\end{aligned}$$

故 $E(\alpha,\beta]z\in\mathfrak{D}$. 这样就説明了 $\mathfrak{D}^a=\mathfrak{H}$. 至于 H 的对称性由

$$\phi(\lambda)=\overline{\phi(\lambda)},\ (E(\lambda)x, y)=(x, E(\lambda)y)=\overline{(E(\lambda)y, x)}$$

可以看出。

$H=H^*$ 的証明 设 $y\in\mathfrak{D}(H^*)$，$H^*y=y^*$，則由于 $E(\alpha,\beta]z\in\mathfrak{D}$，得

$$\begin{aligned}(z, E(\alpha,\beta]y^*)&=(E(\alpha,\beta]z, H^*y)=(HE(\alpha,\beta]z, y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d(E(\lambda)E(\alpha,\beta]z, y)\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\phi(\lambda)d(E(\lambda)z, y).\end{aligned}$$

因此，泛函 $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d(E(\lambda)z, y)=F(z)$ 作为有界泛函 $(z, E(\alpha,\beta]y^*)$ 的极限，依共鳴定理，它也是有界泛函，而由前定理便有

[1] 这里还用到 Riesz 定理。——譯者注

$y\in\mathfrak{D}$. 这样一来，就有 $\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{D}\supseteqq\mathfrak{D}(H^*)$，結合 $H\subseteqq H^*$ 卽得 $H=H^*$.

最后 $HE(\lambda)\supseteqq E(\lambda)H$ 的証明 設 $x\in\mathfrak{D}(H)$，将 $E(\mu)$ 作用于 $Hx=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)dE(\lambda)x$ 的近似和，再取强极限，更由(51.4)卽得

$$E(\mu)Hx=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d(E(\mu)E(\lambda)x)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d(E(\lambda)E(\mu)x)=HE(\mu)x.$$

系 假如 $x\in\mathfrak{A}=\mathfrak{D}(H)$，則

$$\|Hx\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2. \tag{51.14}$$

証明 利用(51.4)，

$$(Hx,\ Hx)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d(E(\lambda)x,\ Hx)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d(HE(\lambda)x,\ x)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\mu)d_\mu(E(\mu)E(\lambda)x,x)\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\lambda)d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}\phi(\mu)d(E(\mu)x,\ x)\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2.$$

§52 自共軛算子的譜分解

譜分解的定义 在定理 11.13 里，当 $\phi(\lambda)=\lambda$ 时，

$$\left.\begin{aligned}&(Hx,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x,\ y),\\&x\in\mathfrak{D}(H)=\left\{x;\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|E(\lambda)x\|^2<\infty\right\},\ y\in\mathfrak{H}\end{aligned}\right\} \tag{51.15}$$

$\left(\text{或者略記为 } H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)\right)$称为 H 的**譜分解** (spectral resolution)。

定理 11.14 对于自共轭算子 H，可确定单位分解 $\{E(\lambda)\}$ 使 H 有形如 (51.15) 的譜分解；并且这样的譜分解对于 H 是唯一的。

証明 由定理 11.8，H 的 Cayley 变换 U_H 是酉算子，并且，如下一章所示，对于任意的酉算子 U 可唯一地确定满足

$$F(0)=0, \quad F(1)=I \tag{52.1}$$

的单位分解，使得表示

$$Ux=\int_0^1 e^{2\pi i\theta}dF(\theta)x=\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\theta}dF(\theta)x \tag{52.2}$$

成立。又反之由 (52.1) ~ (52.2) 便定义了一个酉算子 U。

特别是当 $U=U_H$ 时有

$$F(1-0)=F(1)=I. \tag{52.3}$$

事实上，假如 $F(1)\neq F(1-0)$，那么，由于 $F(1)-F(1-0)\neq 0$，势必存在 y 使 $\{F(1)-F(1-0)\}y=y\neq 0$。但对于这样的 y，由于

$$F(\theta')F(\theta'')=F\{\min(\theta', \theta'')\},$$

将有

$$U_H y=\int_0^1 e^{2\pi i\theta}dF(\theta)\{F(1)-F(1-0)\}y$$
$$=\{F(1)-F(1-0)\}y=y,$$

这和 $(I-U_H)^{-1}$ 的存在（定理 11.5 的 (ii)）相矛盾。

既然 (52.3) 成立，則令

$$\lambda=-\cot\pi\theta, \quad E(\lambda)=F(\theta) \tag{52.4}$$

时，由于 $0<\theta<1$ 与 $-\infty<\lambda<\infty$，借 $\lambda=-\cot\pi\theta$ 而一对一且連同逆映照連續对应，可見 $\{E(\lambda)\}$ 是单位分解。如果利用它作自共轭算子 $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$ 时，

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$$

成立的話，那么 H 的譜分解就由此得到了。

$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$的証明　令$H'=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$，我們只須指出对于$x\in\mathfrak{D}(H')$，$y\in\mathfrak{H}=\mathfrak{D}(U_H)$有

$$(H'(I-U_H)y,\ x)=(i(I+U_H)y,\ x)$$

成立卽可。因为假如是这样的話，則由于$\mathfrak{D}(H')^a=\mathfrak{H}$得

$$H'(I-U_H)y=i(I+U_H)y,$$

更由定理11.5(ii)便知$H'\supseteq H$．于是又有$H'=(H')^*\subseteq H^*=H$，从而得到$H'=H$．

至于$(H'(I-U_H)y,\ x)=(i(I+U_H)y,\ x)$的証明不妨如下进行：因为

$$\begin{aligned}(y-U_Hy,\ F(\theta)x)&=\int_0^1(1-e^{2\pi i\theta'})d_{\theta'}(F(\theta')y,\ F(\theta)x)\\&=\int_0^1(1-e^{2\pi i\theta'})d_{\theta'}(F(\theta)F(\theta')y,\ x)\\&\qquad\qquad(\text{因 }F(\theta)\text{ 为射影算子})\\&=\int_0^\theta(1-e^{2\pi i\theta'})d(F(\theta')y,\ x)\\&\qquad\qquad(\text{由于 }F(\theta)F(\theta')=F(\min(\theta,\ \theta'))),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(y-U_Hy,\ H'x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(y-U_Hy,\ E(\lambda)x)\\&=\int_0^1-\cot\pi\theta\cdot d\left\{\int_0^\theta(1-e^{2\pi i\theta'})d(F(\theta')y,x)\right\}\\&=\int_0^1-\cot\pi\theta(1-e^{2\pi i\theta})d(F(\theta)y,\ x)\\&=\int_0^1 i(1+e^{2\pi i\theta})d(F(\theta)y,\ x)\\&=(i(y+U_Hy),\ x).\end{aligned}$$

最后譜分解的唯一性　設H又可分解为$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE'(\lambda)$，而$E(\lambda_0)\neq E'(\lambda_0)$的$\lambda_0$存在，那么，令

$$\lambda=-\cot\pi\theta,\quad E'(\lambda)=F'(\theta)$$

时，因为在 $\lambda_0=-\cot\pi\theta_0$ 处 $F'(\theta_0)\neq F(\theta_0)$，故依酉算子譜分解的唯一性將有

$$U'=\int_0^1 e^{2\pi i\theta}dF'(\theta)\neq\int_0^1 e^{2\pi i\theta}dF(\theta)=U_H=U.$$

可是通过和上面同样的計算，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE'(\lambda),\ \int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$$

的 Cayley 变换应分别为 U', U, 因此既有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE'(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)=H,$$

就不能不有 $U'=U$，而这是不合理的。 証毕

至此將定理 11.1 系 2，定理 11.8，定理 11.13 及定理 11.14 綜合起来，便得到下面由 J. von Neumann 引入的基本定理。

定理 11.15(J. von Neumann) 对称算子 H_1 具有对称的閉延拓 H_1^{**}. 对称閉算子 H 具有譜分解的充要条件为 H 是自共軛的，而这个条件又等价于 H 的 Cayley 变换是酉算子。

§53 譜分解的例

例 1 对于在 §20 里所述的乘 t 的算子(坐标算子 $t\cdot$)，(51.11) 是它的单位的分解，因为这时成立着

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}|x(t)|^2dt\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}t^2|x(t)|^2dt,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}x(t)\overline{y(t)}\,dt\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}tx(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

例 2 考慮在 §20 里所述的微分算子再乘以常数后所得的算子 $(2\pi i)^{-1}h\cdot d/dt$, $h>0$. 根据 Plancherel 的定理，当令

$$x(t)=Uy(s)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ h^{-1/2}\int_{-n}^{n}e^{2\pi ist/h}y(s)ds$$

时，U 为酉算子，且

$$U^{-1}x(t)=U^{*}x(t)=Ux(-t).$$

于是如果利用(51.11)的 $\{E(\lambda)\}$ 而作

$$E'(\lambda)=UE(\lambda)U^{-1},\tag{53.1}$$

则 $\{E'(\lambda)\}$ 也是单位分解，并且当 $y(s)$, $sy(s)$ 同时属于 $L_2(-\infty, \infty)$ 及 $L_1(-\infty, \infty)$时，积分运算与微分运算可以交换，而得

$$\begin{aligned}(2\pi i)^{-1}h\frac{d}{dt}x(t)&=(2\pi i)^{-1}h\frac{d}{dt}\left\{h^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi ist/h}y(s)ds\right\}\\&=(2\pi i)^{-1}h^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}y(s)\frac{d}{dt}e^{2\pi ist/h}ds\\&=h^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi ist/h}sy(s)ds\\&=U(s\cdot y(s))(t)\\&=UsU^{-1}x(t),\end{aligned}$$

用記号表示就是

$$(2\pi i)^{-1}h\cdot d/dt=UsU^{-1}.\tag{53.2}$$

于是自共轭算子 $H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$ 满足

$$\left.\begin{aligned}&\text{如果 } y(s),\ sy(s)\text{ 同时属于}\\&\qquad L_2(-\infty,\infty)\text{ 及 }L_1(-\infty,\infty),\\&\text{则}\quad Hy(s)=s\cdot y(s)=U^{-1}H'Uy(s),\\&\qquad\qquad H'=(2\pi i)^{-1}h\cdot d/dt.\end{aligned}\right\}\tag{53.2'}$$

可是，对于任意的 $y(s)\in\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{D}(s\cdot)$，如果令

$$\begin{aligned}y_n(s)&=y(s)\quad\text{当 } |s|\leqslant n\text{ 时},\\&=0\quad\text{当 } |s|>n\text{ 时},\end{aligned}$$

则 $y_n(s)$, $s\cdot y_n(s)$ 同时属于 $L_2(-\infty, \infty)$ 及 $L_1(-\infty, \infty)$，且

$$\underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\ y_n=y,\quad \underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\ Hy_n=Hy.$$

由于 H' 是自共轭的，$U^{-1}H'U$ 也是自共轭的[❶]，从而 $U^{-1}H'U$ 及 H 都是閉算子，因此得到

$$U^{-1}H'Uy=\text{s-}\lim_{n\to\infty}U^{-1}H'Uy_n=\text{s-}\lim_{n\to\infty}Hy_n=Hy,$$

也就是說 $U^{-1}H'U$ 成为 H 的延拓，因此

$$U^{-1}H'U\supseteq H,\ \text{从而}\ (U^{-1}H'U)^*=U^{-1}H'U\subseteq H^*=H.$$

于是得到 $U^{-1}H'U=H$. 这样一来就有

$$H'=UHU^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(UE(\lambda)U^{-1})=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE'(\lambda).$$

§54 实算子，Friedrichs 的定理

关于对称算子延拓为自共轭算子的可能性，打算就本节标题所指的予以論述。首先

实算子 当 $\mathfrak{H}=L_2(s)$ 时，如果对称算子 H 满足条件：

$$\left.\begin{array}{l}\text{如}\ x(s)\in\mathfrak{D}(H),\ \text{則}\ \overline{x(s)}\in\mathfrak{D}(H),\\ \text{且}\ H\ \text{将实値函数映成实値函数,}\end{array}\right\}\qquad(54.1)$$

那么 H 称为**实算子**。如乘以 s 的算子 $(Hx(s)=s\cdot x(s))$ 就是这样的例子。

定理 11.16 如果对称閉算子 H 是实算子，則 H 必具有一个自共轭延拓同时是实算子。

証明 首先 H^* 也是实算子。事实上，設

$$x\in\mathfrak{D}(H),\ y\in\mathfrak{D}(H^*),$$

則由 (54.1) 得 $H\bar{x}=\overline{Hx}$, 从而

$$(Hx,\bar{y})=\overline{(H\bar{x},y)}=\overline{(H\bar{x},y)}=(\bar{x},\overline{H^*y})=(x,\overline{H^*y}),$$

因此 H^* 必满足 (54.1)。

如果 $H^*x=\pm ix$ 便有 $H^*\bar{x}=\overline{H^*x}=\mp i\bar{x}$, 可見 $\mathfrak{H}_H^-$ 乃是由 $\mathfrak{H}_H^+$

---

❶ H' 的自共轭性已如 §20 中所示，从而 $U^{-1}H'U$ 的自共轭性由 $U^*=U^{-1}$ 卽知。

的函数的共軛复値函数所組成，因此，如果在 $\mathfrak{D}(\dot{U}_H)^{\perp}=\mathfrak{H}_H^+$ 中取就范正交完全系 $\{\varphi_\alpha\}$，并按

$$\left.\begin{array}{c}\text{当 } x\in\mathfrak{D}(U_H)\text{ 时}, U_Hx=U_1x, \text{ 又} \\ U_1\sum_\alpha c_\alpha\varphi_\alpha=\sum_\alpha c_\alpha\bar{\varphi}_\alpha\end{array}\right\}$$

来定义 U_H 的延拓 U_1 的話，則 U_1 将是 U_H 的酉延拓。再取适合 $U_1=U_{H_1}$ 的自共轭算子 H_1 时，H_1 便是 H 的自共軛延拓（H 是实算子的証明从略）。

注　对于具体給定的偏微分算子 L，要找出使它成为自共軛的边界条件一般是不容易的。例如即使对于象 $i^{-1}\frac{d}{dt}$ 这样的簡单的微分算子来說，如同在 §50 所示，已需要作复杂的考察。可是在 L 是以 C^∞ 函数为系数的偏微分算子且和它的共軛偏微分算子 L^*（§15）一致的情形之下，定理 11.16 便显出它的作用。在这情形下，借助于分部积分，使 L 成为对称算子的边界条件多少可以找到，把由这种边界条件之一所規定的 $L_2(S)$ 的子空間作为定义域 $\mathfrak{D}(H_0)$ 而把 L 看做是对称算子 H_0，然后依定理 11.4 将 H_0 延拓为閉算子 H 时，所得的显然是实算子，因此由定理 11.16，这 H 可延拓为自共軛的 H_1。又因属于 $\mathfrak{D}(H_0)$ 的 x 自然属于 $\mathfrak{D}(H_1)$，所以从 H_1 的譜分解 $H_1=\int\lambda dE(\lambda)$ 可以得到 $H_0x=\int\lambda dE(\lambda)x$。这就是說，对于满足如上边界条件的 $x\in L_2(S)$，有 $Lx=\int\lambda dE(\lambda)x$。并且在限于以这种 x 为对象时，即使由 H_0 求 H，由 H 求 H_1 的手續不实际施行的話，Lx 可譜分解为 $Lx=\int\lambda dE(\lambda)x$ 的形式，这样的事实尽可自由地加以利用。这便是定理 11.16 的一个很重大的意义。同样的說明也适用于下面的定理 11.17。

半有界算子　当 H 为对称算子时，如果存在常数 α，使得对于一切的 $x\in\mathfrak{D}(H)$ 有

$$(Hx,x)\leqslant\alpha\|x\|^2\quad(\text{或 }\geqslant\alpha\|x\|^2),\tag{54.2}$$

則 H 称为**上半有界**（或**下半有界**）[1]。

---

[1] 此后为方便起見称 α 为 H 的上(下)界。——校者注

例 1 設 $q(t)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 的連續函数且恒 $\geqslant 0$. $\mathfrak{D}^\infty(-\infty, \infty)$ 是在 $L_2(-\infty, \infty)$ 內稠密的子空間，对于

$$x(t) \in \mathfrak{D}^\infty(-\infty, \infty) \subseteq L_2(-\infty, \infty),$$

令

$$-\frac{d^2x(t)}{dt^2} + q(t)x(t) \in ❶ L_2(-\infty, \infty)$$

和 $x(t)$ 对应，这样得到的算子 H 是对称的。这是因为，当 $y(t) \in \mathfrak{D}^\infty(-\infty, \infty)$ 时，由分部积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x''(t) + q(t)x(t))\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(-\bar{y}''(t) + q(t)\bar{y}(t))dt$$

的緣故。同样可得

$$(Hx, x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} q(t)|x(t)|^2 dt \geqslant 0,$$

故 H 是下半有界。

例 2 設 R 为 E^m 的区域，$q(x) = q(x_1, \cdots, x_m)$ 在 R 連續且恒 $\geqslant 0$. 把属于 $\mathfrak{D}^\infty(R) \subseteq L_2(R)$ 的 $f(x)$ 映照成

$$-\Delta f(x) + q(x)f(x) \in L_2(R), \quad \Delta = \text{拉普拉斯算子}$$

的算子 H 是下半有界，証明可仿例 1。

对于半有界算子，下面的定理有广泛的应用。

定理 11.17 (Friedrichs-Freudenthal) ❷ 上(或下)半有界算子 H 必具有上(或下)半有界的自共轭延拓 $\widetilde{H}$，而且它的上(下)界和 H 相同。

証明 只要就下半有界情形来証明好了，因为在上半有界时可考虑 $-H$. 又因总可以对 H 加上自共轭算子 $(1-\alpha)I$，故尽可假定

$$(Hx, x) \geqslant \|x\|^2, \quad x \in \mathfrak{D}(H)$$

成立而不丧失一般性。

---

❶ 此地原书作 $\subseteq$，有誤。——校者注

❷ K. Friedrichs: Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren, Math. Ann., **109** (1924), 465~487. H. Freudenthal: Über die Friedrichsche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren, Proc. Acad. Amsterdam, **39** (1936), 832~833.

（第1段） 我們定义 $\mathfrak{D}(H)$ 中任意两点的新內积为

$$(x, y)' = (Hx, y),$$

从而定义新范数为

$$\|x\|' = (Hx, x)^{\frac{1}{2}}.$$

把这样得到的 pre-Hilbert 空間 $\mathfrak{D}(H)$ 完备化后所成的 Hilbert 空間記为 $\mathfrak{D}(H)'$.

首先指出，当不考虑拓扑而仅作为抽象集合来看时，$\mathfrak{D}(H)'$ 可看做是 $\mathfrak{H}$ 的子空間。其証如下：如果 $\mathfrak{D}(H)$ 的点列 $\{x_n\}$ 滿足收斂条件 $\lim\limits_{n, m\to\infty} \|x_n - x_m\|' = 0$，則，由于 $\|x\|' \geqslant \|x\|$，也有 $\lim\limits_{n, m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$. 因此，由于 $\mathfrak{H}$ 的完备性，存在 $x \in \mathfrak{H}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. 于是只要說明当令 $\mathfrak{H}$ 的点 x 对应于 $\{x_n\} = \bar{x} \in \mathfrak{D}(H)'$ 时，这对应

$$\{x_n\} \to x$$

是一对一的就好了。为此又只須說明，当 $\mathfrak{D}(H)$ 的另一点列 $\{y_n\}$ 滿足收斂条件 $\lim\limits_{n, m\to\infty} \|y_n - y_m\|' = 0$ 且設 $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$, $y \in \mathfrak{H}$ 时，假如 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 为 $\mathfrak{D}(H)'$ 的相异点的話，則 $x \neq y$ 就可以了。令

$$z_n = x_n - y_n,$$

由

$$\lim_{n, m\to\infty} \|z_n - z_m\|' = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|z_n\|' = \beta > 0$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = 0$$

来导出矛盾，这种矛盾事实上可由 $\mathfrak{D}(H)'$ 中內积的連續性如下得出：

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \lim_{n\to\infty} (\|z_n\|')^2 = \lim_{n, m\to\infty} (z_n, z_m)' = \lim_{n, m\to\infty} (Hz_n, z_m) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (Hz_n, z_m) = \lim_{n\to\infty} (Hz_n, 0) = 0.\end{aligned}$$

（第2段） 因为 $\mathfrak{D}(H)'$ 作为抽象集合时可看成 $\mathfrak{H}$ 的子空間，所以可以考虑 $\mathfrak{H}$ 的子空間

$$\widetilde{\mathfrak{D}}=\mathfrak{D}(H^*)\cap\mathfrak{D}(H)',$$

而且由于 $\mathfrak{D}(H)\subseteqq\mathfrak{D}(H^*)$ 有

$$\mathfrak{D}(H)\subseteqq\widetilde{\mathfrak{D}}\subseteqq\mathfrak{D}(H^*).$$

现在指出,以这个 $\widetilde{\mathfrak{D}}$ 为定义域,而在 $\widetilde{\mathfrak{D}}$ 上等于 H^* 的算子 $\widetilde{H}$ 是 H 的自共軛延拓。其証如下: 首先説明 $\widetilde{H}$ 的对称性。設 $x, y\in\widetilde{\mathfrak{D}}$, 则由于 $x, y\in\mathfrak{D}(H)'$, 必存在 $\mathfrak{D}(H)$ 的点列 $\{x_m\}$, $\{y_m\}$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}\|x_m-x\|'=0,\quad \lim_{m\to\infty}\|y_m-y\|'=0.$$

从而根据 $\mathfrak{D}(H)'$ 中内积的連續性,当 $m\to\infty$, $n\to\infty$ 时,

$$(x_m, y_n)'=(Hx_m, y_n)=(x_m, Hy_n)$$

收斂。由于 $\mathfrak{H}$ 中内积的連續性,它的极限与

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(Hx_m, y_n)&=\lim_{m\to\infty}(Hx_m, y)\\&=\lim_{m\to\infty}(x_m, \widetilde{H}y)=(x, \widetilde{H}y),\\ \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(x_m, Hy_n)&=\lim_{n\to\infty}(x, Hy_n)\\&=\lim_{n\to\infty}(\widetilde{H}x, y_n)=(\widetilde{H}x, y)\end{aligned}$$

中的任一个都相等,因此 $\widetilde{H}$ 是对称的。

其次,設 $x\in\mathfrak{D}(H)$, $y\in\mathfrak{H}$, 则

$$|(x, y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|\leqslant\|x\|'\cdot\|y\|.$$

从而 $F(x)=(x, y)$ 成为定义于在 $\mathfrak{D}(H)'$ 稠密子集 $\mathfrak{D}(H)$ 上的,按范数 $\|\ \|'$ 意义有界的加法泛函,于是在 Hilbert 空間 $\mathfrak{D}(H)'$ 中应用 Riesz 定理(§ 7)便知存在 $y'\in\mathfrak{D}(H)'$ 使

$$(x, y)=(x, y')'=(Hx, y'),\quad x\in\mathfrak{D}(H)$$

成立。由这式得 $y'\in\mathfrak{D}(H^*)$ 且 $H^*y'=y$. 因此也就説明了

$$y'\in\widetilde{\mathfrak{D}}\ 且\ \widetilde{H}y'=y.$$

这意味着对称算子 $\widetilde{H}$ 的值域 $\mathfrak{W}(\widetilde{H})$ 和 $\mathfrak{H}$ 一致,依定理 11.3 系,$\widetilde{H}$ 是自共軛的。

$(\widetilde{H}x, x)\geqslant\|x\|^2$, $x\in\mathfrak{D}(\widetilde{H})$ 的成立可由上面証明的方法得知。

第12章　酉算子的譜分解

在前章里，是把自共軛算子的譜分解归結到酉算子的譜分解。关于酉算子的譜分解虽然有不少的証法，但在本书中我們将利用关于“正定数列”的 Herglotz 定理来証明它。

§55 Helly 的选取定理

定理 12.1 (Helly)　設閉区間 $[0, 1]$ 上单調增加函数的序列 $\{v_n(\theta)\}$ 是一致有界的，亦即

$$\sup_{n;0\leq\theta\leq 1} |v_n(\theta)| < \infty.$$

这时可适当地选出收斂子列 $\{v_{n'}(\theta)\}$ 及单調增加右連續❶的 $v_\infty(\theta)$，使得在 $v_\infty(\theta)$ 的連續点(但 $0<\theta<1$) 及 $\theta=1$ 处，成立

$$\lim_{n'\to\infty} v_{n'}(\theta) = v_\infty(\theta).$$

証明　因为 $[0, 1]$ 中的有理数是可数的，可将它們排成序列 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$. 因数列

$$v_1(\theta_1),\ v_2(\theta_1),\ v_3(\theta_1),\ \cdots$$

有界，依 Bolzano-Weierstrass 定理，可选出收斂子列

$$v_{1(1)}(\theta_1),\ v_{2(1)}(\theta_1),\ v_{3(1)}(\theta_1),\ \cdots.$$

同样可从有界数列

$$v_{1(1)}(\theta_2),\ v_{2(1)}(\theta_2),\ v_{3(1)}(\theta_2),\ \cdots$$

选出收斂子列

$$v_{1(2)}(\theta_2),\ v_{2(2)}(\theta_2),\ v_{3(2)}(\theta_2),\ \cdots.$$

照这样继續下去，可从在 $\theta=\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n$ 收斂的函数列

---

❶ $v_\infty(\theta+0) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} v_\infty(\theta+\varepsilon) = v_\infty(\theta)$.

$$v_{1(n)}(\theta),\ v_{2(n)}(\theta),\ v_{3(n)}(\theta),\ \cdots$$

中选出子列

$$v_{1(n+1)}(\theta),\ v_{2(n+1)}(\theta),\ v_{3(n+1)}(\theta),\ \cdots$$

使得它在 $\theta=\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_{n+1}$ 收敛，于是 $\{v_n(\theta)\}$ 的子列

$$v_{1(1)}(\theta),\ v_{2(2)}(\theta),\ v_{3(3)}(\theta),\ \cdots,\ v_{n(n)}(\theta),\ \cdots$$

在 $\theta=\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k,\ \cdots$ 收斂。記 $v_{n(n)}(\theta)=v_{n''}(\theta)$，則

$$-\infty<\lim_{n''\to\infty} v_{n''}(\theta_j)=\tau_j<\infty.$$

由于 $v_{n''}(\theta)$ 的单調增加性，当 $\theta_k<\theta_m$ 时 $\tau_k\leqslant\tau_m$，从而凭

$$v_\infty(\theta)=\begin{cases}\inf\limits_{\theta<\theta_j}\tau_j & (0\leqslant\theta<1\text{ 时}),\\ \lim\limits_{n''\to\infty} v_{n''}(1) & (\theta=1\text{ 时})\end{cases}$$

定义的 $v_\infty(\theta)$ 是单調增加的函数。

由

$$\inf_{\theta_j>\theta}\tau_j=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \inf_{\theta_k>\theta+\varepsilon}\tau_k$$

可知 $0\leqslant\theta<1$ 时，$v_\infty(\theta+0)=v_\infty(\theta)$。又由有理数的稠密性，对于任意的 $\theta\,(0<\theta<1)$ 与任意的 $\varepsilon>0$（但 $0<\theta-2\varepsilon$），可取 θ_j 与 θ_k 使 $\theta>\theta_j>\theta-\varepsilon>\theta_k>\theta-2\varepsilon$，从而得

$$v_\infty(\theta)\geqslant\tau_j\geqslant v_\infty(\theta-\varepsilon)\geqslant\tau_k\geqslant v_\infty(\theta-2\varepsilon),$$

因此

$$v_\infty(\theta-0)=\sup_{\theta_j<\theta}\tau_j.$$

其次，設 $0\leqslant\theta<1,\ \theta<\theta_j$，則 $v_n(\theta)\leqslant v_n(\theta_j)$，因此 $\overline{\lim\limits_{n''\to\infty}}\, v_{n''}(\theta)\leqslant\tau_j$，由是

$$\overline{\lim_{n''\to\infty}}\, v_{n''}(\theta)\leqslant\inf_{\theta>\theta_j}\tau_j=v_\infty(\theta)=v_\infty(\theta+0).$$

同样，設 $0<\theta<1,\ \theta_j<\theta$，則 $\tau_j\leqslant\underline{\lim\limits_{n''\to\infty}}\, v_{n''}(\theta)$，从而

$$\sup_{\theta_j<\theta}\tau_j=v_\infty(\theta-0)\leqslant\underline{\lim_{n''\to\infty}}\, v_{n''}(\theta).$$

于是在能令 $v_\infty(\theta-0)=v_\infty(\theta+0)$ 成立的 θ（但 $0<\theta<1$）及 $\theta=1$

处，$\lim\limits_{n''\to\infty} v_{n''}(\theta)$ 存在而等于 $v_\infty(\theta)$。

可是单調增加右連續的有界函数 $v_\infty(\theta)$ 的不連續点至多成一可数集合❶。証明如下：設 $0=\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k=1$，則

$$v_\infty(1)-v_\infty(0)=\sum_{j=0}^{k-1}\left(v_\infty(\lambda_{j+1})-v_\infty(\lambda_j)\right),$$

因此 $v_\infty(\lambda)-v_\infty(\lambda-0)\geqslant 1$ 这样的 $\lambda(0<\lambda\leqslant 1)$，其个数不超过 $v_\infty(1)-v_\infty(0)$。同样，$1>v_\infty(\lambda)-v_\infty(\lambda-0)\geqslant 2^{-1}$ 这样的 $\lambda(0<\lambda\leqslant 1)$，其个数不超过 $2(v_\infty(1)-v_\infty(0))$。一般，适合 $n^{-1}>v_\infty(\lambda)-v_\infty(\lambda-0)\geqslant(n+1)^{-1}$ 的 $\lambda(0<\lambda\leqslant 1)$，其个数不超过 $(n+1)(v_\infty(1)-v_\infty(0))$。但如 $v_\infty(\theta)$ 在 $\theta=\lambda$ 不連續，則或者 $v_\infty(\lambda)-v_\infty(\lambda-0)\geqslant 1$，或者对于某整数 $n\geqslant 1$，必有 $n^{-1}>v_\infty(\lambda)-v_\infty(\lambda-0)\geqslant(n+1)^{-1}$ 成立，所以 $v_\infty(\lambda)$ 的不連續点至多成一可数集合。

根据以上所述，使 $\lim\limits_{n''\to\infty} v_{n''}(\theta)$ 不存在的 θ 即使有，也不外乎是可数个，設它們是 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \cdots$。如果选 $\{v_{n''}(\theta)\}$ 的子列 $\{v_{n'}(\theta)\}$，使它在 $\theta=\lambda_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 也还收斂，那么 $\{v_{n'}(\theta)\}$ 便在所有的 θ 收斂。

§56　正定数列，Herglotz 的定理

正定数列　設 $\{\cdots,\ u_{-n},\ \cdots,\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots\}$ 是复数列，如果对于任意的整数 $n\geqslant 0$ 与任意的复数 $\xi_0,\ \xi_1,\cdots,\xi_n$，都滿足

$$\sum_{j,k=0}^{n} u_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant 0, \tag{56.1}$$

則称这个数列为**正定数列**。

例　若 U 为酉算子，則对于任意的 $x\in\mathfrak{H}$，

$$u_n=u(n,\ x)=(U^n x,\ x)\qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

是正定数列。

---

❶ 任何单調函数的不連續点皆成一可数集合。书上所設的乃是該定理的特殊情形，但由此特殊情形也可推得一般的定理。——譯者注

証明 对于一切的整数 n, 由 $U^{-n}=(U^*)^n=(U^n)^*$ 可以知道 U^n 是酉算子。于是

$$\sum_{j,k=0}^{n} u_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k=\sum_{j,k}(U^{j-k}x,x)\xi_j\bar{\xi}_k$$
$$=\sum_{j,k}(U^jx,U^kx)\xi_j\bar{\xi}_k=\left(\sum_j \xi_jU^jx,\sum_k \xi_kU^kx\right)\geqslant 0.$$

定理 12.2 正定数列 $\{u_n\}$ 满足

$$\left.\begin{aligned} u_n&=\bar{u}_{-n},\\ |u_n|&\leqslant u_0.\end{aligned}\right\}\tag{56.2}$$

証明 于(56.1)中令 $n=0$, $\xi_0=\xi$, 得 $u_0\xi\bar{\xi}\geqslant 0$, 从而 $u_0\geqslant 0$。仿此对于任意的 ξ, η 及 n 可得

$$u_0\xi\bar{\xi}+(u_n\eta\bar{\xi}+u_{-n}\xi\bar{\eta})+u_0\eta\bar{\eta}\geqslant 0.$$

由于 $u_0\geqslant 0$, 左边括号内必須是实数, 于是令 $\eta\bar{\xi}=1$, i 时, (u_n+u_{-n}), $i(u_n-u_{-n})$ 的双方都成为实数, 而得 $u_n=\bar{u}_{-n}$。从而在上式中令 $\xi=\eta e^{-i\theta}$ 得 $\Re(u_ne^{i\theta})+u_0\geqslant 0$。取 θ 使 $\Re(u_ne^{i\theta})=-|u_n|$ 便得 $|u_n|\leqslant u_0$。

定理 12.3 (Herglotz) 对于正定数列 $\{u_n\}$, 可选 $[0,1]$ 上单調增加且右連續的 $v(\theta)$ 使表示

$$u_n=\int_0^1 e^{2\pi in\theta}dv(\theta)\qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

成立,并且这样的 $v(\theta)$ 在 $v(0)=0$ 的条件下是唯一确定的。

証明 于(56.1)中設 $n=m-1$, 并令

$$\xi_0=1,\ \xi_1=e^{-2\pi i\theta},\ \cdots,\ \xi_{m-1}=e^{-2\pi i(m-1)\theta},$$

則得

$$0\leqslant m^{-1}\sum_{j,k=0}^{m-1}u_{j-k}e^{-2\pi i(j-k)\theta}=\sum_{k=-m+1}^{m-1}\left(1-\frac{|k|}{m}\right)u_ke^{-2\pi ik\theta}.$$

令上式右边为 $p_m(\theta)$, 两边乘以 $e^{2\pi ik\theta}$ 并从 0 至 1 积分,得

$$u_k=m(m-|k|)^{-1}\int_0^1 p_m(\theta)e^{2\pi ik\theta}d\theta$$
$$=m(m-|k|)^{-1}\int_0^1 e^{2\pi ik\theta}dv_m(\theta),\quad v_m(\theta)=\int_0^\theta p_m(\theta)d\theta.\tag{56.3}$$

由于 $p_m(\theta)\geqslant 0$，故 $v_m(\theta)$ 关于 θ 单调增加且 $v_m(0)=0$, $v_m(1)=u_0$.

于是可应用 Helly 的选取定理，即存在单调增加右連續的 $v_\infty(\theta)$ 及收斂子列 $\{v_{n'}(\theta)\}$，使得在 $v_\infty(\theta)$ 的連續点 θ (但 $0<\theta<1$) 及 $\theta=1$，有 $\lim\limits_{n'\to\infty} v_{n'}(\theta)=v_\infty(\theta)$.

因为 $e^{2\pi ik\theta}$ 在 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 一致連續，故对于任意的 $\varepsilon>0$，可将 $[0, 1]$ 分割为 $0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_s=1$，使当 θ 与 θ' 的双方同时进入一个子区間时，总有 $|e^{2\pi ik\theta}-e^{2\pi ik\theta'}|<\varepsilon$. 并且因为单調增加函数 $v_\infty(\theta)$ 的不連續点至多成一可数集合，所以 $\theta_j (j=1, \cdots, s-1)$ 还可以取为 $v_\infty(\theta)$ 的連續点。因此在 $\theta=\theta_j (j=1, \cdots, s)$ 处也就有 $\lim\limits_{n'\to\infty} v_{n'}(\theta)=v_\infty(\theta)$.

兹設 $g_\varepsilon(\theta)=e^{2\pi ik\theta_j}$, $\theta_j\leqslant\theta<\theta_{j+1}$ $(j=0, 1, \cdots, s-1)$，那么，由于 $v_m(0)=0$，有

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi ik\theta}dv_{m'}(\theta)-\sum_{j=0}^{s-1} g_\varepsilon(\theta_j)\,(v_{m'}(\theta_{j+1})-v_{m'}(\theta_j))\right| \leqslant \varepsilon v_{m'}(1)=\varepsilon u_0.$$

同样，对于

$$v(\theta)=v_\infty(\theta)-v_\infty(0)\quad (0<\theta<1),\quad v(1)=v_\infty(1),\quad v(0)=0$$

有

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi ik\theta}dv(\theta)-\sum_{j=0}^{s+1} g_\varepsilon(\theta_j)\,(v(\theta_{j+1})-v(\theta_j))\right|\leqslant\varepsilon u_0.$$

可是

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{j=0}^{s-1} e^{2\pi ik\theta_j}(v_{m'}(\theta_{j+1})-v_{m'}(\theta_j))\right\}$$
$$=\sum_{j=0}^{s-1} e^{2\pi ik\theta_j}(v(\theta_{j+1})-v(\theta_j))+(1-e^{2\pi ik\theta_{s-1}})v_\infty(0).$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，結果遂有

$$\lim_{m'\to\infty}\int_0^1 e^{2\pi ik\theta}dv_{m'}(\theta)=\int_0^1 e^{2\pi ik\theta}dv(\theta),$$

于是由 (56.3),

$$u_k=\lim_{m'\to\infty} m'(m'-|k|)^{-1}\int_0^1 e^{2\pi ik\theta}dv_{m'}(\theta)=\int_0^1 e^{2\pi ik\theta}dv(\theta).$$

最后，$v(\theta)$ 在 $v(0)=0$ 条件下被唯一确定的証明 設这样的 $v(\theta)$ 有两个，考虑它們的差 $w(\theta)$，則 $w(\theta)$ 是有界变差且右連續，并满足 $w(0)=0$ 及

$$\int_0^1 e^{2\pi ik\theta}dw(\theta)=0 \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

我們只須由此导出 $w(\theta)\equiv0$ 好了。根据上式，首先对于 $e^{2\pi i\theta}$ 与 $e^{-2\pi i\theta}$ 的任何多項式 $P(\theta)$ 有 $\int_0^1 P(\theta)dw(\theta)=0$. 但因周期为 1 的任何連續函数 $f(\theta)$ 可用三角多項式 $P(\theta)$ 一致地来逼近 (Weierstrass)，故 $\int_0^1 f(\theta)dw(\theta)=0$. 今設 θ_0, θ_1 为任意两个满足 $0<\theta_0<\theta_1<1$ 的 $w(\theta)$ 的連續点，并令

$$\begin{aligned} f_n(\theta)&=0 && (\text{在 } 0\leqslant\theta\leqslant\theta_0 \text{ 及 } \theta_1\leqslant\theta\leqslant1)\\ &=1 && (\text{在 } \theta_0+n^{-1}\leqslant\theta\leqslant\theta_1-n^{-1})\\ &=\text{綫性函数} && (\text{在其余的 } \theta), \end{aligned}$$

則由上面有 $\int_0^1 f_n(\theta)dw(\theta)=0$. 从而令 $n\to\infty$ 时得

$$w(\theta_1)-w(\theta_0)=\int_0^1 \{\lim_{n\to\infty} f_n(\theta)\}dw(\theta)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(\theta)dw(\theta)=0.$$

因为 $w(\theta)$ 的不連續点成一可数集合，$w(\theta)$ 的連續点全体必在 $[0, 1]$ 内稠密，于是，由 $w(\theta)$ 的右連續性，对于任意的 θ_1', θ_0' (但 $0\leqslant\theta_0'<\theta_1'<1$)，根据上式可得

$$w(\theta_1')=w(\theta_0').$$

这是因为，如果取 $w(\theta)$ 的連續点列 $\{\theta_{n(1)}\}$, $\{\theta_{n(0)}\}$ 使 $\theta_{n(1)}\downarrow\theta_1'$, $\theta_{n(0)}\downarrow\theta_0'$, 則根据上式就有 $w(\theta_{n(1)})=w(\theta_{n(0)})$ 的緣故。旣如此，当 $0\leqslant\theta<1$ 时皆有 $w(\theta)=w(0)=0$. 由此也可得 $w(1)=0$. 否則对于一切的連續周期函数 $f(\theta)$ 将有 $0=\int_0^1 f(\theta)dw(\theta)=f(1)\cdot w(1)$.

§57　酉算子的譜分解

定理 12.4　对于酉算子 U，存在着滿足

$$F(0)=0,\ F(1)=I, \tag{57.1}$$

$$F(\theta)F(\theta')=F(\min(\theta,\theta'))\quad(0\leqslant\theta,\ \theta'\leqslant 1), \tag{57.2}$$

$$F(\theta+0)=F(\theta) \tag{57.3}$$

的单位分解 $\{F(\theta)\}$，使

$$(U^n x,\ y)=\int_0^1 e^{2\pi in\theta}d(F(\theta)x,\ y)\quad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots), \tag{57.4}$$

亦卽 $U^n=\int_0^1 e^{2\pi in\theta}dF(\theta)$。并且这样的 $\{F(\theta)\}$ 唯一地确定。

証明　应用前定理于正定数列 $\{u_n\}$，$u_n=u(n;x)=(U^n x,\ x)$，就可唯一地确定使

$$(U^n x,\ x)=\int_0^1 e^{2\pi in\theta}dv(\theta)\qquad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

成立的单調增加、右連續且滿足 $v(0)=0$ 的函数 $v(\theta)=v(\theta;x,\ x)$。現在令

$$v(\theta;x,y)=\frac{1}{4}\{v(\theta;x+y,\ x+y)-v(\theta;x-y,\ x-y)$$
$$+iv(\theta;\ x+iy,\ x+iy)-iv(\theta;\ x-iy,\ x-iy)\},$$

則

$$(U^n x,\ y)=\int_0^1 e^{2\pi in\theta}dv(\theta;\ x,\ y)\quad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{57.5}$$

成立[1]。可仿前定理中唯一性的証明推知，当 $x,\ y$ 固定时，通过上式左边的各值，滿足 (57.5) 的有界变差且右連續的 $v(\theta;\ x,\ y)$ 在 $v(0;\ x,\ y)=0$ 条件下就被唯一地确定。

由于这个唯一性，可見 $v(\theta;x,y)$ 和 $(U^n x,\ y)$ 一样，关于 x 是加法的。又由 (57.5)，$\overline{(U^n x,\ y)}=(y,\ U^n x)=(U^{-n}y,\ x)$ 及 v 的唯一

[1] 对于 Hilbert 空間中的任意加法算子 T，成立着公式：
$(Tx,\ y)=4^{-1}\{(T(x+y),\ (x+y))-(T(x-y),\ (x-y))+i(T(x+iy),\ (x+iy))-i(T(x-iy),\ (x-iy))\}$。——譯者注

性也可得到

$$\overline{v(\theta;x,y)}=v(\theta;\,y,\,x). \tag{57.6}$$

因此，再由 $0\leqslant v(0;\,x,\,x)\leqslant v(\theta;\,x,\,x)\leqslant v(1;\,x,\,x)$ 便可得

$$\begin{aligned}|v(\theta;\,x,\,y)|^2&\leqslant v(\theta;\,x,\,x)v(\theta;\,y,\,y)\\&\leqslant v(1;\,x,\,x)v(1;\,y,\,y).\end{aligned} \tag{57.7}$$

左边不等式的証明可利用(57.6)仿 Schwarz 不等式

$$|(x,\,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$$

的情形同样来作。于(57.5)中令 $n=0$ 得

$$v(1;\,x,\,y)=(x,\,y)，特别是\ v(1;\,y,\,y)=\|y\|^2, \tag{57.8}$$

因此 $\overline{v(\theta;\,x,\,y)}$ 作为 y 的泛函是有界加法的。于是依 Riesz 定理可确定算子 $F(\theta)$ 使得

$$v(\theta;\,x,\,y)=(F(\theta)x,\,y),\quad F(0)=0,\ F(1)=I.$$

$F(\theta)$ 的有界性，可由(57.7)如下推出：

$$\begin{aligned}|(F(\theta)x,\,y)|&=|v(\theta;\,x,\,y)|\\&\leqslant(v(1;\,x,\,x)v(1;\,y,\,y))^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.\end{aligned}$$

又 $F(\theta)$ 的对称性可由(57.6)而知。这样，(57.5)就成为

$$(U^n x,\,y)=\int_0^1 e^{2\pi in\theta}d(F(\theta)x,\,y)\quad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

从而得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2\pi in\theta}d(F(\theta)U^m x,\,y)&=(U^nU^m x,\,y)=(U^{n+m}x,\,y)\\&=\int_0^1 e^{2\pi i(n+m)\theta}d(F(\theta)x,\,y)\\&=\int_0^1 e^{2\pi in\theta}d_\theta\left\{\int_0^\theta e^{2\pi im\theta'}d(F(\theta')x,\,y)\right\}.\end{aligned}$$

由于 $(F(\theta)x,\,y)=v(\theta;\,x,\,y)$ 的右連續性，上式右边的 $\{\quad\}$ 也是 θ 的右連續函数，且在 $\theta=0$ 处成为 0. 于是和証明 $v(\theta;\,x,\,y)$ 的唯一性一样可得

$$(F(\theta)U^m x, y) = \int_0^\theta e^{2\pi i m\theta'} d(F(\theta')x, y).$$

但此式左边，由于 $F(\theta)$ 的对称性，又

$$= (U^m x, F(\theta)y) = \int_0^1 e^{2\pi i m\theta'} d_{\theta'}(F(\theta')x, F(\theta)y)$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i m\theta'} d_{\theta'}(F(\theta)F(\theta')x, y).$$

再一次仿照 $v(\theta; x, y)$ 的唯一性的証明就可得

$$(F(\theta)F(\theta')x, y) = (F(\min(\theta, \theta'))x, y),$$

也就是

$$F(\theta)F(\theta') = F(\min(\theta, \theta')).$$

因此 $F(\theta)$ 是射影算子。

和在 § 51 (定理 11.9) 一样可知 $F(\theta+0)$ 的存在，再由 $v(\theta; x, y) = (F(\theta)x, y)$ 的右連續性就不能不有 $F(\theta+0) = F(\theta)$. 又从上面的証明中也可看出 $\{F(\theta)\}$ 是唯一确定的。 証毕

譜分解的例 1 对于 $y(s) \in L_2(-\infty, \infty)$，令 $e^{is}y(s)$ 和它对应，这样得到的算子 U_1 是酉算子。定义 $\{F(\theta)\}_{0\le\theta\le1}$ 如下：

如果 $2n\pi < s \leqslant 2(n+1)\pi \quad (n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots)$，則

$$\begin{cases} F(\theta)y(s) = y(s) & \text{当 } s \leqslant 2\pi\theta + 2n\pi \leqslant 2(n+1)\pi \text{ 时,} \\ F(\theta)y(s) = 0 & \text{当 } 2\pi\theta + 2n\pi < s \text{ 时,} \end{cases}$$

这样的 $\{F(\theta)\}_{0\le\theta\le1}$ 是单位分解。这时設 $0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = 1$，如果 θ_j' 是 $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ 的內点，且 s 以 2π 为模 (mod 2π) 是 $[2\pi\theta_{j-1}, 2\pi\theta_j]$ 的內点❶的話，則有

$$e^{is}y(s) - \sum_{j=1}^{n-1} e^{2\pi i\theta_j'}(F(\theta_j) - F(\theta_{j-1}))y(s) = (e^{is} - e^{2\pi i\theta_j'})y(s),$$

从而

$$\|U_1 y - \sum_{j=1}^{n-1} e^{2\pi i\theta_j'}(F(\theta_j) - F(\theta_{j-1}))\| \leqslant \max|e^{is} - e^{2\pi i\theta_j'}| \|y\|,$$

与 z 作內积即得

$$(U_1 y, z) = \int_0^1 e^{2\pi i\theta} d(F(\theta)y, z).$$

譜分解的例 2 对于 $x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$，令 $x(t+1)$ 和 $x(t)$ 对应，这个

❶ 即有 $[2\pi\theta_{j-1}, 2\pi\theta_j]$ 的內点 θ 使 $s-\theta$ 为 2π 的整数倍。——校者注

算子 U_1 是酉算子。借 Fourier 变換

$$y(s)=(Ux)(s)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ (2\pi)^{-1}\int_{-n}^{n}e^{-ist}x(t)\,dt,$$

对于 $x_1(t)=x(t+1)=(T_1x)(t)$ 有

$$(Ux_1)(s)=e^{is}(Ux)(s)=e^{is}y(s),$$

因此得 $UT_1=U_1U$，因而

$$T_1=U^{-1}U_1U.$$

和 $\{F(\theta)\}$ 一样 $\{U^{-1}F(\theta)U\}$ 也是单位分解，从而易知

$$(T_1x,z)=\int_0^1 e^{2\pi i\theta}d(U^{-1}F(\theta)Ux,z).$$

第 13 章　特征值問題

有了譜分解定理 11.14，自共軛算子 H 的特征值問題虽然完全被解决了，但是当 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 不是有限維时，出現了也可叫做是連續特征值的"連續譜"。这就和有限維的自共軛矩陣情形有了显著的差异。可是如果 H 是全連續的話，就不会出現連續譜。关于 2 阶綫型常微分方程的 Sturm-Liouville 型边值問題，它的特征函数系的完全性可以結合着由該問題的 Green 函数所作的积分算子的全連續性来討論。这样一来，不仅是对 Fourier 級数或 Fourier 积分，而且对出現在数学物理中的許多特殊函数系的有关展开定理的統一处理的一般理論(次章)便有了准备。

§ 58　自共軛算子的譜

譜的定义　設 T 是加法算子，且 $\mathfrak{D}(T)^a=\mathfrak{H}$，对于复数 λ 可根据

$$T_\lambda=T-\lambda I$$

的逆算子 T_λ^{-1} 的考察而給 T 的**譜**(spectra)加以分类。首先，若 T_λ 不具有适合 $\mathfrak{D}(T_\lambda^{-1})^a=\mathfrak{H}$ 的連續逆算子 T_λ^{-1} 时，称 λ 属于 T 的**譜** $S(T)$. 因此 $S(T)$ 的点还可进一步按**点譜**(point spectra) $P(T)$，**連續譜** $C(T)$，**剩余譜**(residual spectra) $R(T)$ 的三种来分类。

在这里，

(i) $\lambda\in P(T)$ 意味着 $\mathfrak{D}(T_\lambda^{-1})=$ 空集，也就是說 T_λ^{-1} 根本不存在；

(ii) $\lambda\in C(T)$ 意味着 T_λ^{-1} 虽然存在而且有 $\mathfrak{D}(T_\lambda^{-1})^a=\mathfrak{H}$，但 T_λ^{-1} 并不連續；

(iii) $\lambda\in R(T)$ 意味着 T_λ^{-1} 虽然存在，但 $\mathfrak{D}(T_\lambda^{-1})^a\neq\mathfrak{H}$.

由此可見 $\lambda\in P(T)$ 和 λ 为 T 的特征值是等价的。

关于自共軛算子，下面的定理成立。

定理 13.1 对于自共軛算子 $H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$,

(i) $S(H)$是实軸上的集合。

(ii) $\lambda_0\in P(H)$和 $E(\lambda_0)\neq E(\lambda_0-0)$等价,且相应于 λ_0 的特征空間和 $\mathfrak{W}(E(\lambda_0)-E(\lambda_0-0))$一致。

(iii) 实数 λ_0 不属于 $S(H)$ 的充要条件是:对于包含 λ_0 的某开区間 (λ_1,λ_2),有 $E(\lambda_1)=E(\lambda_2)$.

(iv) $\lambda_0\in C(H)$ 的充要条件是: $E(\lambda_0)=E(\lambda_0-0)$, 且对于包含 λ_0 的任意开区間 (λ_1,λ_2)有 $E(\lambda_1)\neq E(\lambda_2)$.

(v) $R(H)$是空集。

証明 若 $\Im(\mu)\neq 0$, 則有界算子$(H-\mu I)^{-1}$存在,且

$$(H-\mu I)^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)^{-1}dE(\lambda) \tag{58.1}$$

成立。事实上,将右边写成近似和而取强极限时,和推出(51.14)一样,得到

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)^{-1}dE(\lambda)x\right\|^2\leqslant\sup_{\lambda}|\mu-\lambda|^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}d\|E(\lambda)x\|^2,\ x\in\mathfrak{H}, \tag{58.2}$$

可見 $\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)^{-1}dE(\lambda)$ 是有界算子。将下式写成近似和,再取强极限并利用(51.4)~(51.6)易知

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)dE(\lambda)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda'-\mu)^{-1}dE(\lambda')x\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)d_{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda'-\mu)^{-1}d_{\lambda'}(E(\lambda)E(\lambda'))x\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)d_{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}(\lambda'-\mu)^{-1}dE(\lambda')x\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}dE(\lambda)x=x,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)^{-1}d_{\lambda}\left\{E(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda'-\mu)dE(\lambda')x\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)^{-1}d_{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda'-\mu)d_{\lambda'}(E(\lambda)E(\lambda'))x\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)^{-1}d_{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}(\lambda'-\mu)dE(\lambda')x\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}dE(\lambda)x=x$$

成立，更因 $(H-\mu I)=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)dE(\lambda)$ 就得到 (58.1)。这样也就証明了(i)。

(v)的証明 假如 $\lambda_0\in R(H)$，則由 (i)，λ_0 必为实数。根据 $\mathfrak{W}(H_{\lambda_0})^a=\mathfrak{D}((H-\lambda_0 I)^{-1})^a\neq\mathfrak{H}$ 的假定，由定理2.2将存在 $y\neq 0$ 使 $y\perp\mathfrak{W}(H_{\lambda_0})$，即对于一切的 $x\in\mathfrak{D}(H)$ 有 $(H_{\lambda_0}x,y)=0$。于是 $(Hx,y)=(\lambda_0 x,y)=(x,\lambda_0 y)$，得到 $y\in\mathfrak{D}(H^*)$ 且 $H^*y=\lambda_0 y$。从而 $Hy=\lambda_0 y$，λ_0 将既属于 $R(H)$ 又属于 $P(H)$，这是不合理的。

(ii)的証明 由(51.14)，

$$\|(H-\lambda_0 I)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda-\lambda_0|^2 d\|E(\lambda)x\|^2. \tag{58.3}$$

于是，由于 $E(\lambda)x$ 关于 λ 的右連續性 (51.5) 与 $E(-\infty)=0$，$Hx=\lambda_0 x$ 的充要条件将是

$$\left.\begin{array}{l}\text{在 }\lambda\geqslant\lambda_0\text{ 时，}E(\lambda)x=E(\lambda_0+0)x=E(\lambda_0)x,\\ \text{在 }\lambda<\lambda_0\text{ 时，}E(\lambda)x=E(\lambda_0-0)x=0,\end{array}\right\}$$

从而利用(51.4)～(51.6)便知

$$Hx=\lambda_0 x \text{ 和 } (E(\lambda_0)-E(\lambda_0-0))x=x$$

是等价的。

(iii)的証明 如果实数 λ_0 是 $\overline{\in}S(H)$，那么自然 $\lambda_0\overline{\in}P(H)$，因此 $H_{\lambda_0}^{-1}$ 存在。并且，既然 $\lambda_0\overline{\in}S(H)$ 也将有 $\lambda_0\overline{\in}C(H)$，又因上面說过 $R(H)$ 为空集，故实数 $\lambda_0\overline{\in}S(H)$ 的充要条件就成为 $H_{\lambda_0}=(H-\lambda_0 I)$ 具有連續的逆算子 $H_{\lambda_0}^{-1}$，但由定理1.6，这又等价于存在某正数 α，使

$$\|(H-\lambda_0 I)x\|\geqslant\sqrt{\alpha}\|x\|,\quad x\in\mathfrak{D}(H). \tag{58.4}$$

故由(58.3)它又等价于下面的条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^2 d\|E(\lambda)x\|^2\geqslant\alpha\|x\|^2,\quad x\in\mathfrak{D}(H).$$

取 λ_1，λ_2 使 $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$ 且 $\lambda_0-\lambda_1=\lambda_2-\lambda_0<\sqrt{\alpha}$。假如这时存在着 y 使得

$$(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))y\neq 0$$

的話，那么由(51.4)将得到和(58.4)矛盾的結果：

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^2 d\|E(\lambda)(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))y\|^2<\alpha^2\|(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))y\|^2.$$

因此实数 $\lambda_0 \overline{\in} S(H)$ 的充要条件是存在包含 λ_0 的开区間 (λ_1, λ_2)，使得 $E(\lambda_1)=E(\lambda_2)$.

連續譜的例 就 § 53 里所述的 $L_2(-\infty,\infty)$ 中的坐标算子 $t\cdot$ 来說，一切的实数 λ_0 都属于連續譜，这时 $t\cdot$ 不是有界算子。設 $-\infty<\alpha<\beta<\infty$，对于属于 $L_2(\alpha,\beta)$ 的 $x(t)$，令 $t\cdot x(t)$ 和它对应的算子 $t\cdot$ 虽然是有界的，它的譜却也全属于連續譜，因为不难看出，这时单位的分解 $E(\lambda)$ 还是

$$\left.\begin{array}{l}\beta\geqslant t>\lambda \text{ 时}, E(\lambda)x(t)=0,\\ \alpha\leqslant t\leqslant\lambda \text{ 时}, E(\lambda)x(t)=x(t).\end{array}\right\} \qquad (51.11')$$

这样即使对于有界算子也出現了連續譜。

§ 59 譜的存在范圍，Kryloff-Weinstein 的定理

首先有

定理 13.2 对于有界的对称算子 H，有

$$\sup_{\lambda\in S(H)}\lambda=\sup_{\|x\|\leqslant 1}(Hx, x),\quad \inf_{\lambda\in S(H)}\lambda=\inf_{\|x\|\leqslant 1}(Hx, x). \qquad (59.1)$$

証明 首先由 H 的对称性有

$$(Hx, x)=(x, Hx)=(\overline{Hx, x})=\text{实数},$$

因此 $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}(Hx, x)=\alpha_2$, $\inf\limits_{\|x\|\leqslant 1}(Hx, x)=\alpha_1$ 有意义。

$\sup\limits_{\lambda\in S(H)}\lambda\leqslant\alpha_2$ 的証明 設 $\lambda_0\in S(H)$，則由定理 13.1，存在 $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_0$ 的 λ_1, λ_2 与 $x=x_{\lambda_1,\lambda_2}\neq 0$，使得 $(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x=y\neq 0$. 因 $(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))$ 为射影算子，故

$$(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))y=(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))^2x=y.$$

从而 $z=z_{\lambda_1,\lambda_2}=y/\|y\|$ 滿足

$$\|z\|=1,\ (E(\lambda_2)-E(\lambda_1))z=z.$$

于是由(51.15)并利用(51.4),

$$(Hz, z)=\int\lambda d(E(\lambda)z, z)=\int\lambda d\|E(\lambda)z\|^2$$
$$=\int\lambda d\|E(\lambda)(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))z\|^2$$
$$=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\lambda d\|(E(\lambda)-E(\lambda_1))z\|^2.$$

这里令 $\lambda_1\uparrow\lambda_0$, $\lambda_2\downarrow\lambda_0$ 得 $\lim(Hz_{\lambda_1,\lambda_2}, z_{\lambda_1,\lambda_2})=\lambda_0$, 从而 $\sup\limits_{\lambda\in S(H)}\lambda$ $=\sup\lambda_0\leqslant\alpha_2$.

$\alpha_2\in S(H)$的証明 假如$\alpha_2\bar\in S(H)$, 則由定理13.1, 存在λ_1, λ_2适合$\lambda_1<\alpha_2<\lambda_2$, 且$E(\lambda_1)=E(\lambda_2)$. 于是由(51.4)有

$$I=I-E(\lambda_2)+E(\lambda_1),$$
$$(I-E(\lambda_2))E(\lambda_1)=E(\lambda_1)(I-E(\lambda_2))=0^{❶},$$

从而或者存在$(I-E(\lambda_2))y\neq0$的y,或者存在$E(\lambda_1)w\neq0$的w❷.

与此相应,令

$$z=(I-E(\lambda_2))y/\|(I-E(\lambda_2))y\| \text{ 或 } u=E(\lambda_1)w/\|E(\lambda_1)w\|^{❸}$$

时,則

$$\|z\|=1,\ (I-E(\lambda_2))z=z \text{ 或 } \|u\|=1,\ E(\lambda_1)u=u,$$

而由(51.4)~(51.6)将得

$$(Hz, z)=\int\lambda d\|E(\lambda)z\|^2=\int\lambda d\|E(\lambda)(I-E(\lambda_2))z\|^2$$
$$=\int_{\lambda_2}^{\infty}\lambda d\|E(\lambda)z\|^2\geqslant\lambda_2>\alpha_2,$$

或者❹

❶ 事实上下面要用到的是 $I-E(\lambda_2)\neq0$ 与 $E(\lambda_1)=I$ 必有一个成立。——校者注

❷ 此处原书不妥,应改为或者 $E(\lambda_1)=I$. ——校者注

❸ 此处应改为或是 u 为空間任一范数为 1 的矢量。——校者注

❹ 此处应改为或者对空間任一范数为 1 的 u 成立着。——校者注

$$(Hu, u)=\int\lambda d\|E(\lambda)u\|^2=\int\lambda d\|E(\lambda)E(\lambda_1)u\|^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\lambda_1}\lambda d\|E(\lambda)u\|^2\leqslant\lambda_1<\alpha_2.$$

这些都不合理。

这样就証明了(58.5)。

注　上面的定理可看做是在变分法中通常采用的对二次形式的極值問題的論法❶推广到无限維的 Hilbert 空間的結果。

定理 13.3 (Kryloff-Weinstein)　設 H 为自共軛算子，如果对于 $\mathfrak{D}(H)$ 中的范数为 1 的矢量 x 算出了

$$\alpha_x=(Hx, x),\quad \beta_x=\|Hx\| \tag{59.2}$$

的話，則对于任意的 $\varepsilon>0$，存在着 $\lambda_0\in S(H)$ 满足

$$\alpha_x-(\beta_x^2-\alpha_x^2)^{1/2}-\varepsilon\leqslant\lambda_0\leqslant\alpha_x+(\beta_x^2-\alpha_x^2)^{1/2}+\varepsilon. \tag{59.3}$$

証明　因为

$$\beta_x^2=(Hx, Hx)=\int\lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2,$$

$$\alpha_x=(Hx, x)=\int\lambda d\|E(\lambda)x\|^2,$$

$$\|x\|^2=\int d\|E(\lambda)x\|^2,$$

故　$$\beta_x^2-\alpha_x^2=\int\lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2-2\alpha_x\int\lambda d\|E(\lambda)x\|^2+\alpha_x^2\int d\|E(\lambda)x\|^2$$

$$=\int(\lambda-\alpha_x)^2 d\|E(\lambda)x\|^2.$$

于是，假如在(59.3)所給出的 λ_0 范圍内 $E(\lambda_0)$ 不变化的話，則在范圍 $(\lambda-\alpha_x)^2\geqslant((\beta_x^2-\alpha_x^2)^{1/2}+\varepsilon)^2$ 内积分时，由 (51.4)～(51.6) 将得到

$$\beta_x^2-\alpha_x^2\geqslant((\beta_x^2-\alpha_x^2)^{1/2}+\varepsilon)^2>\beta_x^2-\alpha_x^2$$

的不合理結果。

---

❶ 本丛书，加藤敏夫著《变分法及其应用》，§1。

注 上面的定理乃是特征值近似計算中一般原理之一，关于把它应用到具体边值問題的例可参閱，例如，吉田：积分方程式論（岩波全书）94～99.

§60 不具連續譜的充分条件，Hilbert-Schmidt 式的展开定理

作为不具連續譜的充分条件可以举出全連續性（§42）[1]。即

定理 13.4 設 H 为全連續对称算子，这时(i) $C(H)$ 不含 0 以外的实数；(ii) H 的特征值至多是可数个，且它們沒有 0 以外的聚点；(iii)和 H 的不为 0 的特征值 λ_j 相应的特征空間 $\mathfrak{E}_{\lambda_j}$ 是有限維的。

証明 設 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 时，如果閉区間 $[\lambda', \lambda'']$ 不含 0，則 $E(\lambda',\lambda'']=E(\lambda'')-E(\lambda')$ 的値域是有限維的。其証如下：假如不然的話，則由于 $E(\lambda', \lambda'']^2=E(\lambda',\lambda'']$ 必可选出可数个綫性独立的 $\{x_j\}$ 滿足

$$E(\lambda', \lambda'']x_j=x_j \quad (j=1, 2, \cdots),$$

然后根据定理 3.1 作就范正交系 $\{y_j\}$，則由 Bessel 不等式将有 $\text{w-}\lim\limits_{j\to\infty} y_j=0$. 因为 $\|y_j\|=1$，依 H 的全連續性，适当的子列 $\{Hy_{j'}\}$ 是强收斂的，于是由 $\text{w-}\lim\limits_{j'\to\infty} y_{j'}=0$ 应有 $\text{s-}\lim\limits_{j'\to\infty} Hy_{j'}=\text{w-}\lim\limits_{j'\to\infty} Hy_{j'}=0$. 但因

$$\|Hy_j\|^2=\int\lambda^2 d\|E(\lambda)y_j\|^2=\int\lambda^2 d\|E(\lambda)(E(\lambda'')-E(\lambda'))y_j\|^2$$

$$=\int_{\lambda'}^{\lambda''}\lambda^2 d\|(E(\lambda)-E(\lambda'))y_j\|^2\geqslant\min(|\lambda'|^2, |\lambda''|^2)\|y_j\|^2,$$

又不能有 $\text{s-}\lim\limits_{j'\to\infty} Hy_{j'}=0$，这不合理。

由此，(ii)与(iii)得証。其次，假如 $\lambda_0\neq 0$ 属于 $C(H)$，則由定理 13.1 的(iv) 将有 $\text{s-}\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} E(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]x=0$. 但是，如上所示，

[1] 原书的这句話不妥，因为全連續算子可能以{0}为連續譜。——校者注

$\mathfrak{B}(E(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon])$是有限維的，从而它的維数必随着 $\varepsilon\downarrow 0$ 而单調減少地收斂于 0。因此对于充分小的 $\varepsilon>0$,不能不有 $E(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]=0$, 而由定理 13.1 的(iv)，这是和 $\lambda_0\in C(H)$ 的假定相反的。所以$C(H)$不含 0 以外的实数。

系(Hilbert-Schmidt 式的展开定理) 对于任意的 $y\in\mathfrak{H}$,

$$y=\{E(0)-E(0-0)\}y+\text{s-}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}P(\mathfrak{E}_{\lambda_j})y. \tag{60.1}$$

証明 由 (51.4) 有 $x=\text{s-}\lim\limits_{\lambda\uparrow\infty}\{E(\lambda)-E(-\lambda)\}x$, 注意到 $\{E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0)\}=P(\mathfrak{E}_{\lambda_j})$ 就得到(60.1)。

§61 作为展开定理之例的 Sturm-Liouville 型边值問題

設 $-\infty<a<0<b<\infty$, 且 $q(t)$ 为$[a,b]$上的連續实函数，考慮对于 2 阶常微分算子

$$L_t=q(t)-\frac{d^2}{dt^2} \tag{61.1}$$

的 **Sturm-Liouville 型边值問題**

$$\begin{cases} L_t x=\lambda x, \quad a\leqslant t\leqslant b, & (61.2)\\ x(a)\cos\alpha+x'(a)\sin\alpha=0, & (61.3)\\ x(b)\cos\beta+x'(b)\sin\beta=0. & (61.4)\end{cases}$$

在此 λ 为复参数，α, β 为实数。使(61.2)～(61.4)具有不恒等于 0 的解 $x(t)$ 的 λ 称为該边值問題的**特征值**，而$x(t)$ 称为相应于該 λ 的**特征函数**。特征函数系构成 $L_2(a,b)$ 的完全正交系，即

定理 13.5 特征值問題 (61.2)～(61.4) 的特征值全是实数，它們构成除$-\infty$ 或 ∞ 以外沒有聚点的可数集合 $\{\lambda_j\}$。 相应于各特征值 λ_j 的特征空間 $\mathfrak{E}_{\lambda_j}\subseteq L_2(a,b)$ 是 1 維的，互相正交，且任意的 $y(t)\in L_2(a,b)$ 可展开成

$$y=\text{s-}\lim_{n\to\infty}\sum_{|\lambda_j|\leqslant n}P(\mathfrak{E}_{\lambda_j})y \tag{61.5}$$

的形式。

注　若取就范的特征函数 $\varphi_j(t)\in\mathfrak{E}_{\lambda_j}$，則有

$$P(\mathfrak{E}_{\lambda_j})y(t)=\left(\int_a^b y(s)\overline{\varphi_j(s)}\,ds\right)\cdot\varphi_j(t).$$

这是因为

$$y(t)=\left(\int_a^b y(s)\overline{\varphi_j(s)}\,ds\right)\varphi_j(t)+\left\{y(t)-\left(\int_a^b y(s)\overline{\varphi_j(s)}\,ds\right)\varphi_j(t)\right\}.$$

而上式的右边第1項 $\in\mathfrak{E}_{\lambda_j}$，第2項和 φ_j 正交的緣故。因此，例如設 $q(t)=0$，且 $\alpha=\beta=0$ 的話，任意的 $y(t)\in L_2(a,b)$ 可在 $L_2(a,b)$ 的范数意义下按(61.2)～(61.4)的就范特征函数系

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}}\sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(t-a)\right)\quad(n=1,2,\cdots),$$

Fourier 式地展开，这样关于 Fourier 級数的 L_2-理論就含在 Sturm-Liouville 型特征值問題中了。若更設 $a\to-\infty$，$b\to\infty$，那么也可說明(61.5)将給出包含 Fourier 积分論的 L_2-理論在内的一般展开定理(次章)。

为了在便于导出一般展开定理的形式之下来証明定理 13.5，我們先复习一下微分方程論的知識作为准备。

考虑 $L_tx=\lambda x$ 的相应于初值条件

$$x_1(0,\lambda)=1,\ x_1'(0,\lambda)=0,\ x_2(0,\lambda)=0,\ x_2'(0,\lambda)=1\quad(61.6)$$

的綫性独立的解 $x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$。它們作为 λ 的函数是在 $|\lambda|<\infty$ 正則的，亦即 λ 的整函数，又从 $q(t)$ 是实函数的事实容易看出，它們滿足

$$x_1(t,\bar{\lambda})=\overline{x_1(t,\lambda)},\ x_2(t,\bar{\lambda})=\overline{x_2(t,\lambda)}.\qquad(61.7)$$

假在 $0\leqslant t<b$，

$$L_tF(t,\lambda)=\lambda F(t,\lambda),\ L_tG(t,\lambda')=\lambda'G(t,\lambda'),$$

則由 Green 的积分公式得

$$\begin{aligned}(\lambda'-\lambda)\int_0^t FG\,dt&=\int_0^t\{FL_tG-GL_tF\}dt\\&=\int_0^t\{-FG''+GF''\}dt=W_0(F,G)-W_t(F,G),\end{aligned}\quad(61.8)$$

在此

$$W_t(H,K)=H(t)K'(t)-K(t)H'(t).\qquad(61.9)$$

因此，在(61.8)中令 $\lambda=\lambda'$，便知 $W_t(F(t,\lambda),G(t,\lambda))$ 不依賴于 t。从而可表为

$$W_t(F(t,\lambda),\ G(t,\lambda))=\omega(\lambda). \tag{61.10}$$

特别取

$$F(t,\lambda)=x_2(t,\lambda),\ G(b,\lambda)=-\sin\beta,\ G'(b,\lambda)=\cos\beta.$$

也就是說，$G(t,\lambda)$ 乃是初值条件 $G(b,\lambda)=-\sin\beta, G'(b,\lambda)=\cos\beta$ 下 $L_tG=\lambda G$ 的解。这样就有

$$\omega(\lambda)=W_b(F(t,\lambda),G(t,\lambda))=x_2(b,\lambda)\cos\beta+x_2'(b,\lambda)\sin\beta.$$

因此，說 $\omega(\lambda_0)=0$ 和說 λ_0 是边值問題

$$\left.\begin{array}{l}L_tx=\lambda_0x,\\ 1\cdot x(0)+0\cdot x'(0)=0,\ \ x(b)\cos\beta+x'(b)\sin\beta=0\end{array}\right\}$$

的特征值（而 $x_2(t,\lambda_0)$ 为特征函数）是同一回事。

定理 13.6 对于任意的实数 β，λ 的整函数

$$x_2(b,\ \lambda)\cos\beta+x_2'(b,\ \lambda)\sin\beta$$

的零点 λ_0 全属实数。

証明 設若 λ_0 不是实数，则由 $L_t\overline{x(t,\lambda_0)}=\overline{\lambda_0x(t,\lambda_0)}$ 及(61.8)将得

$$(\bar\lambda_0-\lambda_0)\int_0^t x(t,\lambda_0)\overline{x(t,\lambda_0)}\,dt$$
$$=W_0(x(t,\lambda_0),\ \overline{x(t,\ \lambda_0)})-W_t(x(t,\ \lambda_0),\ \overline{x(t,\ \lambda_0)}).$$

右边 $=0$，因为 $x(t,\lambda_0)$ 和 $\overline{x(t,\lambda_0)}$ 在 $t=0$，$t=b$ 滿足同一边界条件。但左边由于 $x(t,\lambda_0)\neq0$ 与 $\bar\lambda_0\neq\lambda_0$ 而 $\neq0$，这是不合理的。

对于任意的常数 e，$x=x_1(t,\lambda)+ex_2(t,\lambda)$ 也是 $L_tx=\lambda x$ 的解。今决定 e 使在 b 的边界条件

$$\{x_1(b,\lambda)+ex_2(b,\lambda)\}\cos\beta+\{x_1'(b,\lambda)+ex_2'(b,\lambda)\}\sin\beta=0 \tag{61.11}$$

得到滿足，并将这 e 写作 $l_b(\lambda)$，则

$$l_b(\lambda)=-\frac{x_1(b,\ \lambda)\cos\beta+x_1'(b,\ \lambda)\sin\beta}{x_2(b,\ \lambda)\cos\beta+x_2'(b,\ \lambda)\sin\beta}. \tag{61.12}$$

因为这是λ的整函数之比，所以是λ的半純函数，又因分母是$\omega(\lambda)$，故令$l_b(\lambda)=\infty$的λ，也就是$l_b(\lambda)$的极，不外乎在λ平面的实軸之上。同样$l_b(\lambda)=0$的根，也就是$l_b(\lambda)$的零点，也不外乎在λ平面的实軸之上。

和上面一样，从在$a(-\infty<a<0)$的边界条件

$$\{x_1(a,\lambda)+l_a(\lambda)x_2(a,\lambda)\}\cos\alpha+\{x_1'(a,\lambda)+l_a(\lambda)x_2'(a,\lambda)\}\sin\alpha=0 \tag{61.11'}$$

得λ的半純函数

$$l_a(\lambda)=-\frac{x_1(a,\lambda)\cos\alpha+x_1'(a,\lambda)\sin\alpha}{x_2(a,\lambda)\cos\alpha+x_2'(a,\lambda)\sin\alpha}, \tag{61.12'}$$

$l_a(\lambda)$的极或零点也不外乎在λ平面的实軸之上。

定理 13.7　如果$f(t)$是$[a,b]$上的連續函数，则当$v=\Im(\lambda)\neq0$时，

$$\left.\begin{aligned}&-x''+(q(t)-\lambda)x=f(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,\\&x(a,\lambda)\cos\alpha+x'(a,\lambda)\sin\alpha=0,\\&x(b,\lambda)\cos\beta+x'(b,\lambda)\sin\beta=0\end{aligned}\right\} \tag{61.13}$$

只有一个解$x(t,\lambda)$，它由

$$-x(t,\lambda)=\int_a^b G_{a,b}(t,s,\lambda)f(s)\,ds \tag{61.14}$$

給出。此地$G_{a,b}$为边值問題(61.2)～(61.4)的 **Green** 函数，即

$$G_{a,b}(t,s,\lambda)=\begin{cases}x_b(t,\lambda)x_a(s,\lambda)/W_t(x_a,x_b) & (t\geqslant s),\\x_a(t,\lambda)x_b(s,\lambda)/W_t(x_a,x_b) & (t<s),\end{cases} \tag{61.15}$$

但

$$\left.\begin{aligned}x_a(t,\lambda)&=x_1(t,\lambda)+l_a(\lambda)x_2(t,\lambda),\\x_b(t,\lambda)&=x_1(t,\lambda)+l_b(\lambda)x_2(t,\lambda).\end{aligned}\right\} \tag{61.16}$$

証明　首先由(61.6)，(61.9)，

$$\begin{aligned}W_t(x_a,x_b)&=W_0(x_a,x_b)=W_0(x_1+l_ax_2,x_1+l_bx_2)\\&=W_0(x_1,x_1)+l_aW_0(x_2,x_1)+l_bW_0(x_1,x_2)+l_al_bW_0(x_2,x_2)\\&=0-l_a+l_b+0=l_b(\lambda)-l_a(\lambda),\end{aligned}$$

也就是

$$W_t(x_a, x_b) = l_b(\lambda) - l_a(\lambda), \tag{61.17}$$

可是

$$\text{若 } v = \Im(\lambda) \neq 0, \text{ 則 } l_b(\lambda) - l_a(\lambda) \neq 0. \tag{61.18}$$

事实上，假如 $l_b(\lambda_0) = l_a(\lambda_0)$，則 $\lambda = \lambda_0$ 时 $x = x_a = x_b$ 乃是(61.2)～(61.4)的解，也就是說 λ_0 成为(61.2)～(61.4)的特征値($x_a = x_b$ 为特征函数)。旣如此，λ_0 就不能不是实数，这一点可和定理13.6的証明同样地看出。

于是当 $v = \Im(\lambda) \neq 0$ 时，$G_{a,b}(t, s, \lambda)$ 关于 t, s 連續，并且因为

$$x(t, \lambda) = \frac{x_b(t, \lambda)}{l_a(\lambda) - l_b(\lambda)} \int_a^t x_a(s, \lambda) f(s) ds + \frac{x_a(t, \lambda)}{l_a(\lambda) - l_b(\lambda)} \int_t^b x_b(s, \lambda) f(s) ds,$$

得

$$\begin{aligned}
&-(l_a(\lambda) - l_b(\lambda)) x'(t, \lambda) \\
&= -x_b'(t, \lambda) \int_a^t x_a(s, \lambda) f(s) ds - x_b(t, \lambda) x_a(t, \lambda) f(t) \\
&\quad - x_a'(t, \lambda) \int_t^b x_b(s, \lambda) f(s) ds + x_a(t, \lambda) x_b(t, \lambda) f(t) \\
&= -x_b'(t, \lambda) \int_a^t x_a(s, \lambda) f(s) ds \\
&\quad - x_a'(t, \lambda) \int_t^b x_b(s, \lambda) f(s) ds, \\
&-(l_a(\lambda) - l_b(\lambda)) x''(t, \lambda) \\
&= -x_b''(t, \lambda) \int_a^t x_a(s, \lambda) f(s) ds - x_b'(t, \lambda) x_a(t, \lambda) f(t) \\
&\quad - x_a''(t, \lambda) \int_t^b x_b(s, \lambda) f(s) ds + x_a'(t, \lambda) x_b(t, \lambda) f(t) \\
&= -x_b''(t, \lambda) \int_a^t x_a(s, \lambda) f(s) ds - x_a''(t, \lambda) \int_t^b x_b(s, \lambda) f(s) ds \\
&\quad + (l_a(\lambda) - l_b(\lambda)) f(t),
\end{aligned}$$

再由 $L_t x_a = \lambda x_a$, $L_t x_b = \lambda x_b$ 便知 $-x'' + (q(t) - \lambda)x = f(t)$。同样由于 x_a, x_b 分别满足在 $t=a$, $t=b$ 的边界条件，而知 x 满足在 $t=a$ 及 $t=b$ 的边界条件。

最后，假如上面的解不是唯一的話，那么 $f(t)\equiv 0$ 时的(61.13)便有 $\neq 0$ 的解，而 λ 将为特征值，和 $\Im(\lambda)\neq 0$ 相反。 証毕

如上所示，(61.13)的特征值是半純函数 $l_a(\lambda) - l_b(\lambda)$ 的零点或极，但是这个函数在 $\Im(\lambda)\neq 0$ 时既不为 0，也不为∞，所以特征值全体是 λ 平面的实軸上的集合，而且除无限远点以外沒有聚点，于是存在着不为(61.13)的特征值并且适合 l_a, l_b, $l_a - l_b \neq 0$, ∞ 的实数 $\lambda_0 \neq 0$。当 $\lambda = \lambda_0$ 时(61.14)也被定义，它給出 $\lambda = \lambda_0$ 时(61.13)的唯一解，可和上面同样地看出。

在这里，我們有一个算子 G: 对于 $f(t)\in L_2(a, b)$，对应以

$$(Gf)(t) = \int_a^b G_{a,b}(t, s, \lambda_0) f(s)\, ds \in L_2(a, b). \qquad (61.19)$$

由(61.15)可知 G 是对称的，而且如在 §42 所示，G 是全連續的，于是对于这个 G 可以应用定理 13.4。設 $\varphi(t)\in L_2(a,b)$ 是相应于 G 的特征值 μ 的特征函数，則有

$$\mu\varphi(t) = (G\varphi)(t) = \int_a^b G_{a,b}(t, s, \lambda_0)\varphi(s)\, ds. \qquad (61.20)$$

首先 μ 不为 0，因为和上面一样，$(G\varphi)$满足❶ $L_t G\varphi - \lambda_0 G\varphi = -\varphi$，从而 $\mu = 0$ 将导致 $\varphi = 0$。其次，由于核 $G_{a,b}(t, s, \lambda_0)$ 的連續性，(61.20)的右边就是 $\mu\varphi(t)$，也是連續的，因此，和上面一样，可知 $\mu\varphi(t)$ 满足在 $t=a$, b 的边界条件(61.3)～(61.4)及

$$(-\mu\varphi(t))'' + (q(t) - \lambda_0)(\mu\varphi(t)) = -\varphi(t).$$

于是 $x = \varphi(t)$ 成为对于 $\lambda = \lambda_0 - \mu^{-1}$ 的(61.2)～(61.4)的解。反之，对于 $\lambda = \lambda_0 - \mu^{-1}$ 的(61.2)～(61.4)的解 $x = \varphi$ 也是(61.20)的解，

❶ 因为沒有假定 $\varphi(t)$ 的連續性，所以不外乎是指对殆遍的 t 有 $L_t G\varphi - \lambda_0 G\varphi = -\varphi$ 成立，因此作为 Hilbert 空間 $L_2(a,b)$ 的元素也可以說是 $L_t G\varphi - \lambda_0 G\varphi = -\varphi$。

根据上述是显然的。

这就是説 G 的特征函数系和 (61.2) ~ (61.4) 的特征函数系是一致的，而且 0 不是 G 的特征値。因此，由定理 13.4 的系便得到展开定理 13.5❶。

§ 62 展开定理(61.5)改写为更具体的形式

定理 13.8 任意的 $y(t)\in L_2(a, b)$ 可表現为在 $L_2(a, b)$ 中强收斂意义下的

$$y(t)=\underset{\gamma\downarrow-\infty,\delta\uparrow\infty}{\text{s-lim}}\int_\gamma^\delta\sum_{j,k=1}^{2}\left[\int_a^b y(s)\overline{x_j(s, u)}ds\right]x_k(t, u)d\rho_{jk}^{(a,b)}(u), \quad (62.1)$$

在此

$$\left.\begin{aligned}&\rho_{jk}^{(a,b)}(u_2)-\rho_{jk}^{(a,b)}(u_1)=\lim_{v\downarrow 0}\pi^{-1}\int_{u_1}^{u_2}f_{jk}^{(a,b)}(u+iv)du \quad (u_2>u_1),\text{但}\\&f_{11}^{(a,b)}(\lambda)=\Im\{(l_a(\lambda)-l_b(\lambda))^{-1}\},\\&f_{12}^{(a,b)}(\lambda)=f_{21}^{(a,b)}(\lambda)=\Im\{2^{-1}(l_a(\lambda)+l_b(\lambda))(l_a(\lambda)-l_b(\lambda))^{-1}\},\\&f_{22}^{(a,b)}(\lambda)=\Im\{l_a(\lambda)l_b(\lambda)(l_a(\lambda)-l_b(\lambda))^{-1}\}.\end{aligned}\right\}$$

(62.2)

为了証明的准备，引入两个引理。

引理 1 (61.2) ~ (61.4) 的特征値可如下分类：

(i) $l_a(\lambda_n)=l_b(\lambda_n)\neq 0$ 的 λ_n; (62.3)

(ii) $l_a(\lambda_{m'})=l_b(\lambda_{m'})=0$ 的 $\lambda_{m'}$; (62.4)

(iii) $l_a(\lambda_{k''})=l_b(\lambda_{k''})=\infty$ 的 $\lambda_{k''}$. (62.5)

引理 2 当 $v=\Im(\lambda)\neq 0$ 时，

$$\int_0^b|x_1(t, \lambda)+l_b(\lambda)x_2(t, \lambda)|^2dt=v^{-1}\Im(l_b(\lambda)), \quad (62.6)$$

$$\int_a^0|x_1(t, \lambda)+l_a(\lambda)x_2(t, \lambda)|^2dt=-v^{-1}\Im(l_a(\lambda)). \quad (62.7)$$

---

❶ $\mathfrak{E}_{\lambda_j}$ 的 1 維性可这样看出。因为 $L_tx=\lambda_jx$ 是 2 阶綫性常微分方程，所以它的任何解都是两个綫性独立解的綫性組合。因此，假如 $\mathfrak{E}_{\lambda_j}$ 含有两个綫性独立的函数的話，則所有 $L_tx=\lambda_jx$ 的解將全都滿足边界条件 (61.3) ~ (61.4)，而这是不合理的。

引理1的証明 因为 $L_t x=\lambda x$ 是2阶綫性常微分方程，所以它的任意的解都可作为它的两个綫性独立解的綫性組合而得到。于是和特征值 λ 相应的特征函数应該是 $x_1(t,\lambda)$ 与 $x_2(t,\lambda)$ 的綫性組合。将它除以不为0的常数以后，和特征值 λ 相应的特征函数不外乎有如下三种可能：

$$x_1(t,\lambda)+lx_2(t,\lambda)\quad(l\neq 0),$$
$$x_1(t,\lambda),$$
$$x_2(t,\lambda).$$

根据 $l_a(\lambda)$ 的定义(61.12)及 $l_b(\lambda)$ 的定义(61.12′)，在第1情形里，由于讲明 x_1+lx_2 满足边界条件(61.3)~(61.4)，故得 $l_a(\lambda)=l_b(\lambda)\neq 0$。又在第2情形里得 $l_a(\lambda)=l_b(\lambda)=0$，在第3情形里得 $l_a(\lambda)=l_b(\lambda)=\infty$。

引理2的証明将在下节給出。

定理13.8的証明 由定理13.5及它的注和引理1,2有

$$\begin{aligned}y(t)=\text{s-}\lim_{N\to\infty}\Bigg\{&\sum_{|\lambda_n|\le N}\left(\int_a^b|x_1(s,\lambda_n)+l_a(\lambda_n)x_2(s,\lambda_n)|^2ds\right)^{-1}\\&\cdot\left(\int_a^b y(s)\left(\overline{x_1(s,\lambda_n)}+\overline{l_a(\lambda_n)}\,\overline{x_2(s,\lambda_n)}\right)ds\right)\\&\cdot\left(x_1(t,\lambda_n)+l_a(\lambda_n)x_2(t,\lambda_n)\right)\\&+\sum_{|\lambda_{m'}|\le N}\left(\int_a^b|x_1(s,\lambda_{m'})|^2ds\right)^{-1}\left(\int_a^b y(s)\overline{x_1(s,\lambda_{m'})}ds\right)x_1(t,\lambda_{m'})\\&+\sum_{|\lambda_{k''}|\le N}\left(\int_a^b|x_2(s,\lambda_{k''})|^2ds\right)^{-1}\left(\int_a^b y(s)\overline{x_2(s,\lambda_{k''})}ds\right)x_2(t,\lambda_{k''})\Bigg\}\end{aligned}$$

作(62.6)与(62.7)的和，置 $\lambda=\lambda_n+iv$ 而令 $v\to 0$ 便知在 $l_a(\lambda_n)=l_b(\lambda_n)=\mu_n\neq 0$ 的 λ_n 处，当 $(\lambda-\lambda_n)\to 0$ 时有 $l_a(\lambda)-l_b(\lambda)\sim(\lambda-\lambda_n)\nu_n$，但实数 $\nu_n\neq 0$。从而利用引理2得

$$\begin{aligned}&\int_a^b|x_1(s,\lambda_n)+l_a(\lambda_n)x_2(s,\lambda_n)|^2ds\\&\quad=\lim_{v\to 0}\left\{\int_a^b|x_1(s,\lambda_n+iv)+l_a(\lambda_n+iv)x_2(s,\lambda_n+iv)|^2ds\right.\end{aligned}$$

$$+\int_0^b |x_1(s,\ \lambda_n+iv)+l_b(\lambda_n+iv)x_2(s,\ \lambda_n+iv)|^2ds\Big\}$$

$$=\lim_{v\to 0}\{-v^{-1}\Im(l_a(\lambda_n+iv))+v^{-1}\Im(l_b(\lambda_n+iv))\}=-\nu_n,$$

于是可知在上面 $y(t)$ 的展开中对应于 λ_n 的项为 ($L_2(a,b)$ 中的内积写作 $(z(s),w(s))$)

$$-\nu_n^{-1}(y(s),\ x_1(s,\ \lambda_n))x_1(t,\ \lambda_n)$$
$$-\mu_n\nu_n^{-1}(y(s),\ x_2(s,\ \lambda_n))x_1(t,\ \lambda_n)$$
$$-\mu_n\nu_n^{-1}(y(s),\ x_1(s,\ \lambda_n))x_2(t,\ \lambda_n)$$
$$-\mu_n^2\nu_n^{-1}(y(s),\ x_2(s,\ \lambda_n))x_2(t,\ \lambda_n).$$

其次,在 $l_a(\lambda_{m'})=l_b(\lambda_{m'})=0$ 且 $(\lambda-\lambda_{m'})\to 0$ 时,設

$$l_a(\lambda)\sim(\lambda-\lambda_{m'})\mu_{1m'},\quad l_b(\lambda)\sim(\lambda-\lambda_{m'})\mu_{2m'}$$ [1],

则和在 λ_n 的情形一样,于 $l_a(\lambda)-l_b(\lambda)\sim(\lambda-\lambda_{m'})(\mu_{1m'}-\mu_{2m'})$ 中的 $(\mu_{1m'}-\mu_{2m'})\neq 0$,从而得

$$\int_a^b|x_1(s,\ \lambda_{m'})|^2ds$$
$$=\lim_{v\to 0}\Big\{\int_a^0|x_1(s,\ \lambda_{m'}+iv)+l_a(\lambda_{m'}+iv)x_2(s,\ \lambda_{m'}+iv)|^2ds$$
$$+\int_0^b|x_1(s,\lambda_{m'}+iv)+l_b(\lambda_{m'}+iv)x_2(s,\lambda_{m'}+iv)|^2ds\Big\}$$
$$=\lim_{v\to 0}\{-v^{-1}\Im(l_a(\lambda_{m'}+iv))+v^{-1}\Im(l_b(\lambda_{m'}+iv))\}$$
$$=-(\mu_{1m'}-\mu_{2m'}).$$

于是可知在上面 $y(t)$ 的展开中对应于 $\lambda_{m'}$ 的项为

$$-(\mu_{1m'}-\mu_{2m'})^{-1}(y(s),\ x_1(s,\ \lambda_{m'}))x_1(t,\ \lambda_{m'}).$$

其次,和上面相仿,在 $l_a(\lambda_{k''})=l_b(\lambda_{k''})=\infty$ 的情形 $\lambda_{k''}$ 成为一級的极,而且当 $(\lambda-\lambda_{k''})\to 0$ 时

$$l_a(\lambda)\sim\mu_{1k''}(\lambda-\lambda_{k''})^{-1},\quad l_b(\lambda)\sim\mu_{2k''}(\lambda-\lambda_{k''})^{-1},$$

从而得

---

[1] $l_a(\lambda)$ 的零点 $\lambda_{m'}$ 是1級的零点的事实,在(62.7)中置 $\lambda=\lambda_{m'}+iv$ 而令 $v\to 0$ 卽可看出。

$$\int_a^b |x_2(s, \lambda_{k''})|^2 ds$$

$$= \lim_{v\to 0}\Big\{|l_a(\lambda_{k''}+iv)|^{-2}\int_a^0 |x_1(s, \lambda_{k''}+iv)$$

$$+ l_a(\lambda_{k''}+iv)x_2(s, \lambda_{k''}+iv)|^2 ds$$

$$+ |l_b(\lambda_{k''}+iv)|^{-2}\int_0^b |x_1(s, \lambda_{k''}+iv)$$

$$+ l_b(\lambda_{k''}+iv)x_2(s, \lambda_{k''}+iv)|^2 ds\Big\}$$

$$= \lim_{v\to 0}\Big\{-\frac{\Im(l_a(\lambda_{k''}+iv))}{v|l_a(\lambda_{k''}+iv)|^2}+\frac{\Im(l_b(\lambda_{k''}+iv))}{v|l_b(\lambda_{k''}+iv)|^2}\Big\}$$

$$= \frac{-(\mu_{1k''}-\mu_{2k''})}{\mu_{1k''}\mu_{2k''}}.$$

于是可知在上面 $y(t)$ 的展开中对应于 $\lambda_{k''}$ 的项为

$$-\mu_{1k''}\mu_{2k''}(\mu_{1k''}-\mu_{2k''})^{-1}(y(s), x_2(s, \lambda_{k''}))x_2(t, \lambda_{k''}).$$

另一方面，因为半純函数

$$(l_a(\lambda)-l_b(\lambda))^{-1};\ 2^{-1}(l_a(\lambda)+l_b(\lambda))(l_a(\lambda)-l_b(\lambda))^{-1};$$

$$l_a(\lambda)l_b(\lambda)(l_a(\lambda)-l_b(\lambda))^{-1}$$

的殘数分別为

ν_n^{-1}(于 λ_n) 及 $(\mu_{1m'}-\mu_{2m'})^{-1}$(于 $\lambda_{m'}$)，

$\mu_n\nu_n^{-1}$(于 λ_n)，

$\mu_n^2\nu_n^{-1}$(于 λ_n) 及 $\mu_{1k''}\mu_{2k''}(\mu_{1k''}-\mu_{2k''})^{-1}$(于 $\lambda_{k''}$)，

所以 $y(t)$ 可表現为

$$y(t) = \underset{\gamma\downarrow-\infty,\delta\uparrow\infty}{\text{s-lim}}\int_\gamma^\delta \sum_{j,k=1}^{2}\Big[\int_a^b y(s)\overline{x_j(s,u)}\,ds\Big]x_k(t, u)\,d\rho_{jk}^{(a,b)}(u),$$

在此 $u_2>u_1$，

$$\rho_{11}^{(a,b)}(u_2)-\rho_{11}^{(a,b)}(u_1) = (2\pi i)^{-1}\int_{C(u_1,u_2)}\frac{-d\lambda}{l_a(\lambda)-l_b(\lambda)},$$

$$\rho_{12}^{(a,b)}(u_2)-\rho_{12}^{(a,b)}(u_1) = \rho_{21}^{(a,b)}(u_2)-\rho_{21}^{(a,b)}(u_1)$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{C(u_1,u_2)}\frac{-(l_a(\lambda)+l_b(\lambda))}{2(l_a(\lambda)-l_b(\lambda))}d\lambda,$$

$$\rho_{22}^{(a,b)}(u_2)-\rho_{22}^{(a,b)}(u_1)=(2\pi i)^{-1}\int_{C(u_1,u_2)}\frac{-l_a(\lambda)l_b(\lambda)}{l_a(\lambda)-l_b(\lambda)}d\lambda.$$

但积分路綫 $C(u_1, u_2)$ 乃是把

$$u_1-iv,\ u_2-iv,\ u_2+iv,\ u_1+iv,\ u_1-iv$$

按这顺序联結起来的折綫，这里 v 为任意的正数，而且自然假定 u_1, u_2 都和每一个 $\lambda_n, \lambda_{m'}', \lambda_{k''}$ 不同。

可是由(61.7)与(61.12),(61.12′)有 $l_a(\bar{\lambda})=\overline{l_a(\lambda)}, l_b(\bar{\lambda})=\overline{l_b(\lambda)}$，因此，利用正数 v 的任意性便得到定理13.8。

§63 引理2的証明

依定理13.6，$l_b(\lambda)$ 的极仅能在 λ 平面的实軸之上，于是設 z 为复数，且 $\Im(\lambda)=v\neq 0$，则当 z 在 z 平面的实軸上变动时，

$$l_b(\lambda, z)=-\frac{x_1(b, \lambda)z+x_1'(b, \lambda)}{x_2(b, \lambda)z+x_2'(b, \lambda)} \qquad (63.1)$$

在 l 平面的圓 $C_b(\lambda)$ 的圓周上变动[1]，且 $C_b(\lambda)$ 的半徑为有限。

这圓 $C_b(\lambda)$ 的形状可如下求出。首先因为对于这圓周来說，圓中心与 ∞ 处于对称的关系，所以适合

$$l_b(\lambda, z')=\infty,\ l_b(\lambda, z'')=\text{圓 } C_b(\lambda) \text{ 的中心}$$

的 z', z'' 必有 $z'=\bar{z}''$ 的关系。事实上，通过 $C_b(\lambda)$ 的中心的直綫均与 $C_b(\lambda)$ 的圓周正交，因此，由于对应 $z\leftrightarrow l_b$ 的共形性，通过 z', z'' 的圓周不得不均与 z 平面的实軸正交，从而 $z'=\bar{z}''$。于是由

$$l_b(\lambda, -x_2'(b, \lambda)/x_2(b, \lambda))=\infty$$

而知圓 $C_b(\lambda)$ 的中心为

$$l_b(\lambda, -\overline{x_2'(b, \lambda)}/\overline{x_2(b, \lambda)})=-W_b(x_1, \bar{x}_2)/W_b(x_2, \bar{x}_2). \qquad (63.2)$$

从而圓 $C_b(\lambda)$ 的半徑 $r_b(\lambda)$，作为該中心与圓周上的点 $l_b(\lambda,0)$

---

[1] 因为一次分式变换 $z\to\frac{\gamma z+\delta}{\varepsilon z+\eta}$ 将复平面一对一且共形地映照到复平面上而且把圓仍变成圓。在此直綫作为半徑无限大的圓也包含在圓的范畴里。

的距离，可算出为

$$\left|\frac{x_1'(b,\lambda)}{x_2'(b,\lambda)}-\frac{W_b(x_1,\bar{x}_2)}{W_b(x_2,\bar{x}_2)}\right|=\left|\frac{W_b(x_1,x_2)}{W_b(x_2,\bar{x}_2)}\right|.$$

但由初值条件(61.6)有

$$W_b(x_1,x_2)=W_0(x_1,x_2)=1,$$

又由(61.6)，(61.7)，(61.8)有

$$\begin{aligned}2v\int_0^b|x_2(t,\lambda)|^2dt&=2v\int_0^b x_2(t,\lambda)x_2(t,\bar{\lambda})dt\\&=iW_0(x_2(t,\lambda),x_2(t,\bar{\lambda}))-iW_b(x_2(t,\lambda),x_2(t,\bar{\lambda}))\\&=-iW_b(x_2(t,\lambda),x_2(t,\bar{\lambda})),\ \text{此地}\ v=\Im(\lambda),\end{aligned}\tag{63.3}$$

因此結果为

$$r_b(\lambda)^{-1}=2v\int_0^b|x_2(t,\lambda)|^2dt\quad(v=\Im(\lambda)>0\ \text{时}).\tag{63.4}$$

其次，我們指出

如果 $v=\Im(\lambda)>0$，則圓 $C_b(\lambda)$ 的內部，通过变换 $l_b(\lambda,z)\to z$，被映照到 z 平面的实軸的下半面。　　(63.5)

为此只須注意，由(61.7)，(63.3)得到

$$\begin{aligned}&\Im(-x_2'(b,\lambda)/x_2(b,\lambda))\\&=2^{-1}i\{x_2'(b,\lambda)/x_2(b,\lambda)-x_2'(b,\bar{\lambda})/x_2(b,\bar{\lambda})\}\\&=-2^{-1}iW_b(x_2,\bar{x}_2)/|x_2(b,\lambda)|^2\\&=v\int_0^b|x_2(t,\lambda)|^2dt/|x_2(b,\lambda)|^2.\end{aligned}$$

又因为和 l 平面上位于圓 $C_b(\lambda)$ 外部的无限远点∞相对应的 z 平面的点 $-x_2'(b,\lambda)/x_2(b,\lambda)$，其虛部满足上式，所以(63.5)成立。

于是对于从(63.1)解出的

$$z=-\frac{x_2'(b,\lambda)l_b(\lambda,z)+x_1'(b,\lambda)}{x_2(b,\lambda)l_b(\lambda,z)+x_1(b,\lambda)}\tag{63.6}$$

来說，

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果 } v=\Im(\lambda)>0\text{，則 } l_b(\lambda,z)\text{在圓 } C_b(\lambda)\text{ 的}\\ \text{內部(周上)和 } \Im(z)<0\ (\Im(z)=0)\text{等价，}\end{array}\right\}\tag{63.7}$$

从而由(63.6)，$\Im(z)<0$，亦即 $i(z-\bar{z})>0$ 和

$$i\left\{-\frac{x_2'(b,\lambda)l_b(\lambda,z)+x_1'(b,\lambda)}{x_2(b,\lambda)l_b(\lambda,z)+x_1(b,\lambda)}+\frac{\overline{x_2'(b,\lambda)}\,\overline{l_b(\lambda,z)}+\overline{x_1'(b,\lambda)}}{\overline{x_2(b,\lambda)}\,\overline{l_b(\lambda,z)}+\overline{x_1(b,\lambda)}}\right\}>0$$

等价，故也和

$$iW_b(x_1+l_b(\lambda,\ z)x_2,\bar{x}_1+\overline{l_b(\lambda,z)}\bar{x}_2)>0$$

等价。因此，由得自(61.8)的

$$2v\int_0^b|x_1+lx_2|^2dt$$
$$=i\{W_0(x_1+lx_2,\ \bar{x}_1+\bar{l}\bar{x}_2)-W_b(x_1+lx_2,\ \bar{x}_1+\bar{l}\bar{x}_2)\}$$

及得自(61.6)的

$$W_0(x_1+lx_2,\ \bar{x}_1+\bar{l}\bar{x}_2)$$
$$=W_0(x_1,\ \bar{x}_1)+W_0(x_2,\ \bar{x}_1)l+W_0(x_1,\ \bar{x}_2)\bar{l}+W_0(x_2,\ \bar{x}_2)|l|^2$$
$$=-l+\bar{l}=-2i\Im(l)$$

便知

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果 } v=\Im(\lambda)\neq0\text{，則 } l\text{ 在圓 } C_b(\lambda)\text{ 的內部或周上}\\ \text{分別和}\\ \displaystyle\int_0^b|x_1(s,\ \lambda)+lx_2(s,\ \lambda)|^2ds<v^{-1}\Im(l)\text{ 或}=v^{-1}\Im(l)\\ \text{等价。}\end{array}\right\}\tag{63.8}$$

若同样定义圓 $C_a(\lambda)$ 的話，就可知

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果 } v=\Im(\lambda)\neq0\text{，則 } l\text{ 在圓 } C_a(\lambda)\text{的內部或周上分}\\ \text{別和}\\ \displaystyle\int_a^0|x_1(s,\lambda)+lx_2(s,\lambda)|^2ds<-v^{-1}\Im(l)\text{ 或}=-v^{-1}\Im(l)\\ \text{等价。}\end{array}\right\}\tag{63.8'}$$

証毕

第 14 章 Weyl-Stone-Titchmarsh-Kodaira 的展开定理

展开定理 13.8 是在微分算子 $L_t=q(t)-\frac{d^2}{dt^2}$ 的系数 $q(t)$ 假定为有限閉区間 $[a, b]$ 上的連續实函数的条件下得到的。但若只假定了 $q(t)$ 在开区間 (a, b) 內部的連續性，算子 L_t 在边界点 $t=a$，$t=b$ 是否呈現特异性呢？这样就引导到所謂特异边值問題。这时考虑含于开区間 (a, b) 內部的閉区間 $[a', b']$，从对于該閉区間 $[a', b']$ 的展开定理 13.8 适当地过渡到极限 $a'\downarrow a$，$b'\uparrow b$，便可得到标題中所提出的展开定理。这样一来，不仅是 Fourier 級数論或 Fourier 积分論，所有关于 Hermite 函数，Laguerre 函数，Bessel 函数等古典的展开定理都可得到統一的处理。由于篇幅的限制只能讲述导出該結果的步驟。

§ 64 边界的分类——极限点型与极限圓型

下面为簡单起見只考虑 $a=-\infty$，$b=\infty$ 的无限开区間 $(-\infty, \infty)$ [1]. 如果对于某复数 λ_0，

$$L_t x(t)=\lambda_0 x(t), \quad 0\leqslant t<\infty \tag{64.1}$$

的所有的解 $x(t)$ 均 $\in L_2(0, \infty)$，則称算子 L_t 在 $t=\infty$ 为**极限圓型** (limit circle type)。当上述条件不滿足时称算子 L_t 在 $t=\infty$ 为**极限点型**(limit point type)。我們之所以能够和 λ_0 的值无关地来对 L_t 分类，是由于下面的定理。

定理 14.1 如果对于某复数 λ_0，(64.1) 的所有的解都属于 $L_2(0, \infty)$，則对于任意的复数 λ，$L_t x=\lambda x$ 的所有的解也都属于 $L_2(0, \infty)$.

---

[1] 如果 L_t 的系数 $q(t)$ 在开区間 (a, b) 的內部連續的話，則即使不是 $a=-\infty$，$b=\infty$，下面所作的討論仍旧有效。

証明 取(64.1)的綫性独立解 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 滿足

$$W_t(\varphi, \psi)=W_0(\varphi, \psi)=1,$$

那么

$$L_t x=\lambda x=\lambda_0 x+(\lambda-\lambda_0)x$$

的任意的解，如果对于任意的常数 c 适当地取常数 c_1, c_2 时，滿足积分方程❶

$$\begin{aligned} x(t)=&c_1\varphi(t)+c_2\psi(t)\\ &+(\lambda-\lambda_0)\int_c^t(\varphi(t)\psi(\tau)-\varphi(\tau)\psi(t))x(\tau)d\tau. \quad (64.2)\end{aligned}$$

其証如下：首先因为有

$$\begin{aligned} x'(t)=&c_1\varphi'(t)+c_2\psi'(t)\\ &+(\lambda-\lambda_0)\int_c^t(\varphi'(t)\psi(\tau)-\varphi(\tau)\psi'(t))x(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

所以鉴于 φ 与 ψ 的綫性独立性，必可适当地选取 c_1 与 c_2 使 $x(t)$ 在 $t=c$ 滿足任意的初値条件 $x(c)=\alpha_1$，$x'(c)=\alpha_2$。又由上面

$$\begin{aligned} L_t x(t)=&c_1L_t\varphi(t)+c_2L_t\psi(t)+(\lambda-\lambda_0)\{W_t(\varphi, \psi)x(t)\\ &+\int_c^t[L_t\varphi(t)\psi(\tau)-\varphi(\tau)L_t\psi(t)]x(\tau)d\tau\}\\ =&c_1\lambda_0\varphi(t)+c_2\lambda_0\psi(t)+(\lambda-\lambda_0)\{x(t)\\ &+\lambda_0\int_c^t(\varphi(t)\psi(\tau)-\varphi(\tau)\psi(t))x(\tau)d\tau\}\\ =&\lambda x(t).\end{aligned}$$

其次設 $t>c\geq 0$，并記 $\|x\|_c=\left(\int_c^t|x(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$。因为 $\varphi, \psi\in L_2(0, \infty)$，故存在常数 M 使对于所有如上的 t，$\|\varphi\|_c\leq M$，$\|\psi\|_c\leq M$ 成立。由 Schwarz 不等式有

---

❶ (64.2)是一个有連續核的第二种 Volterra 积分方程，因此总有唯一的解。——譯者注

$$\left|\int_c^t (\varphi(t)\psi(\tau)-\varphi(\tau)\psi(t))x(\tau)\,d\tau\right|$$
$$\leqslant M(|\varphi(t)|+|\psi(t)|)\|x\|_c,$$

将此与(64.2)結合,并利用 $\|(|\varphi|+|\psi|)\|_c\leqslant\|\varphi\|_c+\|\psi\|_c$ 得

$$\|x\|_c\leqslant(|c_1|+|c_2|)M+2|\lambda-\lambda_0|M^2\|x\|_c.$$

如取 c 充分大,使 M 小到满足不等式 $|\lambda-\lambda_0|M^2<4^{-1}$, 便有

$$\|x\|_c\leqslant 2(|c_1|+|c_2|)M,$$

因为右边不依赖于 $t\geqslant c$ 的 t, 所以 $x\in L_2(0,\infty)$.　　　　証毕

注1　和上面一样,若对于某个 λ_0,

$$L_t x=\lambda_0 x,\quad -\infty<t\leqslant 0$$

的所有的解均 $\in L_2(-\infty,0)$ 时,称算子 L_t 在 $t=-\infty$ 为极限圆型; 当这条件不满足时称算子 L_t 在 $t=-\infty$ 为极限点型。

注2　当 $0<b'<b$ 时,因为

$$\int_0^{b'}|x_1(s,\lambda_0)+lx_2(s,\lambda_0)|^2ds<\int_0^b|x_1(s,\lambda_0)+lx_2(s,\lambda_0)|^2ds,$$

故由(63.8),

如果 $v=\mathfrak{F}(\lambda_0)\neq 0$, 則对于 $0<b'<b$ 有 $C_b(\lambda_0)\subseteqq C_{b'}(\lambda_0)$,　　　　(64.3)

于是,

如果 $v=\mathfrak{F}(\lambda_0)\neq 0$, 則凭 $C_\infty(\lambda_0)=\bigcap_{b>0}C_b(\lambda_0)$　　　　(64.4)

所定义的 $C_\infty(\lambda_0)$ 或者成为半徑 >0 的有限圆, 或者成为半徑0的圆也就是一点。这两种情形分别和算子 L_t 在 $t=\infty$ 成为极限圓型, 极限点型的情形相对应。其实也就是因为这个緣故才叫做极限圓型,极限点型的。

証明　如果 $C_\infty(\lambda_0)$至少含有两点 l_0, l_1, 那么由 (63.8) 可知 $(x_1(t,\lambda_0)+l_0x_2(t,\lambda_0))$ 与 $(x_1(t,\lambda_0)+l_1x_2(t,\lambda_0))$ 必同时属于 $L_2(0,\infty)$. 于是作为它們的綫性組合的所有 $L_tx=\lambda_0x$ 的解也 $\in L_2(0,\infty)$. 在 $C_\infty(\lambda_0)$ 成为一点的情形, $C_b(\lambda_0)$ 的半徑 $r_b(\lambda_0)$ 必滿足 $\lim\limits_{b\to\infty}r_b(\lambda_0)=0$, 从而这时由 (63.4) $x_2(t,\lambda_0)$不属于 $L_2(0,\infty)$.

极限点型的例　　$x''+\lambda x=0,\quad -\infty<t<\infty.$

在此情形

$$x_1(t,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,t,\quad x_2(t,\lambda)=\sqrt{\lambda}^{-1}\sin\sqrt{\lambda}\,t.$$

在 $t=\infty$ 是极限点型可由 $\Im(\lambda)=v>0$ 时的解 $e^{-it\sqrt{\lambda}}$ 不属于 $L_2(0, \infty)$ 而得知。同样，因为解 $e^{it\sqrt{\lambda}}$ 不属于 $L_2(-\infty, 0)$，所以在 $t=-\infty$ 也是极限点型。

极限圆型的例 同一方程 $x''+\lambda x=0$ 如果在有限开区間 $(-1, 1)$ 来考虑的話，则在边界 $t=1$, $t=-1$ 显然是极限圆型。

§65 Weyl-Stone-Titchmarsh-Kodaira 的展开定理

由(62.1)及 $L_2(a, b)$ 中内积的連續性有

$$(y, y)_{a,b}=\int_a^b y(t)\overline{y(t)}\,dt$$

$$=\lim_{\gamma\downarrow-\infty,\delta\uparrow\infty}\int_\gamma^\delta\sum_{j,k=1}^{2}\left[\int_a^b y(s)\overline{x_j(s, u)}\,ds\right]\left[\int_a^b \overline{y(t)}x_k(t, u)\,dt\right]d\rho_{jk}^{(a,b)}(u).$$

由此，将 y 换为 $y+\nu z$(ν 为参数)可得：

如果 $y(t)$, $z(t)\in L_2(a, b)$，则

$$(y, z)_{a,b}=\int_a^b y(t)\overline{z(t)}\,dt$$

$$=\lim_{\gamma\downarrow-\infty,\delta\uparrow\infty}\int_\gamma^\delta\sum_{j,k=1}^{2}\left[\int_a^b y(s)\overline{x_j(s, u)}\,ds\right]\left[\int_a^b \overline{z(t)}x_k(t, u)\,dt\right]d\rho_{jk}^{(a,b)}(u). \tag{65.1}$$

于是对于任意的 $Y(t)$, $Z(t)\in L_2(-\infty, \infty)$，設

$$-\infty<a<a'<0<b'<b<\infty,$$

$$y(t)=\begin{cases}Y(t), & a'\leqslant t\leqslant b',\\ 0, & t<a' \text{ 或 } t>b',\end{cases}\quad z(t)=\begin{cases}Z(t), & a'\leqslant t\leqslant b'\\ 0, & t<a' \text{ 或 } t>b',\end{cases}$$

并将 $y(t)$ 及 $z(t)$ 看作是属于 $L_2(a', b')$ 的函数时，由(65.1)得

$$\int_{a'}^{b'} Y(t)\overline{Z(t)}\,dt$$

$$=\lim_{\gamma\downarrow-\infty,\delta\uparrow\infty}\int_\gamma^\delta\sum_{j,k=1}^{2}\left[\int_{a'}^{b} Y(s)\overline{x_j(s, u)}\,ds\right]\left[\int_{a'}^{b'} \overline{Z(t)}x_k(t, u)\right]d\rho_{jk}^{(a,b)}(u). \tag{65.2}$$

可是如果适当地取 $a_n \downarrow -\infty$, $b_n \uparrow \infty$ 的实数列的話，可以办到下面的事：存在半純函数 $m_1(\lambda)$ 与 $m_2(\lambda)$，使得

$$\left.\begin{array}{l} \text{凡在 } \Im(\lambda)=v\neq 0 \text{ 的点,} \\ \lim_{n\to\infty} l_{a_n}(\lambda)=m_1(\lambda), \quad \lim_{n\to\infty} l_{b_n}(\lambda)=m_2(\lambda), \end{array}\right\} \tag{65.3}$$

并且在所有 $\Im(\lambda)=v\neq 0$ 的点，下面的极限存在，

$$\left.\begin{array}{l} f_{11}(\lambda)=\lim_{n\to\infty} f_{11}^{(a_n,b_n)}(\lambda)=\Im\{(m_1(\lambda)-m_2(\lambda))^{-1}\}, \\ f_{12}(\lambda)=f_{21}(\lambda)=\lim_{n\to\infty} f_{12}^{(a_n,b_n)}(\lambda) \\ \qquad =\Im\{2^{-1}(m_1(\lambda)+m_2(\lambda))(m_1(\lambda)-m_2(\lambda))^{-1}\}, \\ f_{22}(\lambda)=\lim_{n\to\infty} f_{22}^{(a_n,b_n)}(\lambda)=\Im\{m_1(\lambda)m_2(\lambda)(m_1(\lambda)-m_2(\lambda))^{-1}\}. \end{array}\right\} \tag{65.4}$$

同时由

$$\left.\begin{array}{l} u_2>u_1 \text{ 时} \\ \rho_{jk}(u_2)-\rho_{jk}(u_1)=\lim_{v\downarrow 0} \pi^{-1}\int_{u_1}^{u_2} f_{jk}(u+iv)\,du \end{array}\right\} \tag{65.5}$$

而定义的函数 $\rho_{jk}(u)$ 在 u 的任意有限区間上为有界变差的，且于 $\rho_{jk}(u)$ 的連續点 u，有

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{jk}^{(a_n,b_n)}(u)=\rho_{jk}(u). \tag{65.6}$$

于是在(65.2)中取 $a=a_n$, $b=b_n$ 而令 $n\to\infty$ 便导出

$$\int_{a'}^{b'} Y(t)\overline{Z(t)}\,dt$$
$$=\lim_{\gamma\downarrow-\infty,\delta\uparrow\infty}\int_\gamma^\delta \sum_{j,k=1}^{2}\left[\int_{a'}^{b'} Y(s)\overline{x_j(s,u)}\,ds\right]\left[\int_{a'}^{b'}\overline{Z(t)}\,x_k(t,u)\right]d\rho_{jk}(u)$$

而得下面的展开定理❶。

定理 14.2　設 $x_1(t,\lambda)$, $x_2(t,\lambda)$ 为适合初值条件 (61.6) 的 $L_t x=\lambda x$ 的解，如果按 (61.12′) 及 (61.12) 定义 $l_a(\lambda)$ 及 $l_b(\lambda)$，按(65.3)定义 $m_1(\lambda)$，$m_2(\lambda)$并由(65.4)及(65.5)作 $\rho_{jk}(u)$，那么

---

❶ 其实这应称为 W-S-T-K 的完备性定理，但由此不难导出真正的 W-S-T-K 展开定理。——譯者注

对于 $Y(t), Z(t)\in L_2(-\infty, \infty)$,

$$\left.\begin{aligned}(Y, Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)\overline{Z(t)}dt = \lim_{a'\downarrow-\infty, b'\uparrow\infty}\int_{a'}^{b'} Y(t)\overline{Z(t)}dt \\ &= \lim_{a'\downarrow-\infty, b'\uparrow\infty}\ \lim_{\gamma\downarrow-\infty, \delta\uparrow\infty}\int_{\gamma}^{\delta}\sum_{j,k=1}^{2}\left[\int_{a'}^{b'} Y(s)\overline{x_j(s, u)}ds\right] \\ &\quad\times\left[\int_{a'}^{b'}\overline{Z(t)}x_k(t, u)\,dt\right]d\rho_{jk}(u).\end{aligned}\right\} \quad (65.7)$$

注 1 上面只叙述了証明的步驟,关于詳細的証明可参考下列各书:

E. C. Titchmarsh: Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations (Oxford, 1946).

小平邦彦:二阶常微分演算子の固有値問題について,数学,1,第3号～第4号(1948)。

吉田耕作:积分方程式論,岩波全书(1950),161 頁以后。

吉田耕作:ヒルベルト空間論,共立全书(1953),119 頁以后。

E. A. Coddington and N. Levinson: Theory of ordinary differential equations (New York, 1955), 222 頁以后。

再者,通过 H. Weyl 与 M. H. Stone 的研究虽然已知存在着保証按 (65.7) 展开的可能性的密度矩陣 $(\rho_{jk}(u))$,但是这密度矩陣 $(\rho_{jk}(u))$ 可由 (65.4)～(65.5) 具体地求出却是由 Titchmarsh 与 Kodaira (小平)所指出的。在这意义之下所以定理 14.2 称为 *W-S-T-K* 展开定理。

注 2 我們将証明(65.3)并就具体例子来説明实际作密度矩陣的手續。

首先,为了标明 $l_b(\lambda)$ 的定义 (62.12) 含实数 β 作为参数,特将它写作 $l_b(\lambda;\beta)$,注意 $l_b(\lambda;\beta)$ 处于圓 $C_b(\lambda)$ 的周上并且(64.3)～(64.4) 成立。

L_t 在 $t=\infty$ 为极限点型的情形: 因为在这种情形下 $C_\infty(\lambda)$ 成为一点,所以存在和实数 β 无关的极限 $\lim_{b\to\infty} l_b(\lambda;\beta)=C_\infty(\lambda)$,而只须对于任意的实数 β,令

$$m_2(\lambda)=\lim_{b\to\infty} l_b(\lambda;\beta)$$

就可以了,因此令 $\beta=0$ 就得

$$m_2(\lambda)=\lim_{b\to\infty}\{-x_1(b, \lambda)/x_2(b, \lambda)\}. \quad (65.8)$$

同样,在 $t=-\infty$ 为极限点型的情形也不妨令

$$m_1(\lambda)=\lim_{a\to-\infty}\{-x_1(a,\lambda)/x_2(a,\lambda)\}. \tag{65.9}$$

又在前一情形下，由(63.8)得到

$$\int_0^b|x_1(s,\lambda)+l_b(\lambda)x_2(s,\lambda)|^2ds=v^{-1}\Im(l_b(\lambda)),\ \Im(\lambda)=v\neq0.$$

在上式中令 $b\to\infty$ 得

$$\int_0^\infty|x_1(s,\lambda)+m_2(\lambda)x_2(s,\lambda)|^2ds=v^{-1}\Im(m_2(\lambda)),\ \Im(\lambda)=v\neq0.$$

因为其中的 $m_2(\lambda)=C_\infty(\lambda)$ 当 $\Im(\lambda)=v\neq0$ 时为有限，所以

$$\{x_1(s,\lambda)+m_2(\lambda)x_2(s,\lambda)\}\in L_2(0,\infty).$$

可是当 L_t 在 $t=\infty$ 为极限点型时，$L_tx=\lambda x$ 的所有解中属于 $L_2(0,\infty)$ 的解 $x(t,\lambda)$ 成为这个 $\{x_1(t,\lambda)+m_2(\lambda)x_2(t,\lambda)\}$ 的常数倍，因此由(61.6)便知

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果求得 } L_tx=\lambda x \text{ 的解 } x(t,\lambda) \text{ 而且满足}\\ \qquad 0<\displaystyle\int_0^\infty|x(t,\lambda)|^2dt<\infty,\\ \text{则}\qquad m_2(\lambda)=x'(0,\lambda)/x(0,\lambda).\end{array}\right\} \tag{65.8'}$$

同样，在 $t=-\infty$ 为极限点型的情形也是类似的：

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果求得 } L_tx=\lambda x \text{ 的解 } x(t,\lambda) \text{ 而且满足}\\ \qquad 0<\displaystyle\int_{-\infty}^0|x(t,\lambda)|^2dt<\infty,\\ \text{则}\qquad m_1(\lambda)=x'(0,\lambda)/x(0,\lambda).\end{array}\right\} \tag{65.9'}$$

例　$L_t=-y''$ 的情形。因为如前节所述，$x_1(t,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}t$，$x_2(t,\lambda)=(\sqrt{\lambda})^{-1}\sin\sqrt{\lambda}t$，故当 $\Im(\lambda)>0$ 时，

$$\begin{aligned}m_1(\lambda)&=\lim_{a\to-\infty}\{-x_1(a,\lambda)/x_2(a,\lambda)\}\\&=-\sqrt{\lambda}\lim_{a\to-\infty}\cos\sqrt{\lambda}a/\sin\sqrt{\lambda}a\\&=-\sqrt{\lambda}i.\end{aligned}$$

同样，也可得 $m_2(\lambda)=\sqrt{\lambda}i=-m_1(\lambda)$❶. 因此有

---

❶ 如果 $\Im(\lambda)>0$，则 $x(t,\lambda)=e^{i\sqrt{\lambda}t}$ 满足 $x(0,\lambda)=1$，$0<\int_0^\infty|x(t,\lambda)|^2dt<\infty$. 因为对于这个 $x(t,\lambda)$ 有 $x'(0,\lambda)/x(0,\lambda)=\sqrt{\lambda}i$，故与(65.8')符合。

$$\pi d\rho_{11}(u)/du=\Im\{(m_1(u)-m_2(u))^{-1}\}=-\Im(2\sqrt{u}i)^{-1}$$

$$=\begin{cases}(2\sqrt{u})^{-1} & u>0,\\ 0 & u<0,\end{cases}$$

$$\pi d\rho_{12}(u)/du=\pi d\rho_{21}(u)/du=0,$$

$$\pi d\rho_{22}(u)/du=\Im\{m_1(u)m_2(u)/(m_1(u)-m_2(u))\}=\Im(\sqrt{u}i/2)$$

$$=\begin{cases}\sqrt{u}/2 & u>0,\\ 0 & u<0\end{cases}$$

而(65.7)成为

$$\int_{-\infty}^{\infty}Y(t)\overline{Z(t)}\,dt$$

$$=\lim_{a'\downarrow-\infty,\,b'\uparrow\infty}\lim_{\delta\uparrow\infty}\int_0^{\delta}(2\pi\sqrt{u})^{-1}du\Big\{\int_{a'}^{b'}Y(s)\cos\sqrt{u}s\,ds$$

$$\cdot\int_{a'}^{b'}\overline{Z(t)}\cos\sqrt{u}t\,dt+\int_{a'}^{b'}Y(s)\sin\sqrt{u}s\,ds$$

$$\cdot\int_{a'}^{b'}\overline{Z(t)}\sin\sqrt{u}t\,dt\Big\},$$

如果把积分中的变数 u 借 $\sqrt{u}=\nu$ 改换为 ν,那么易知上式恰好表明 $L_2(-\infty,\infty)$ 中 Fourier 变换的酉算子性 $(Y,Z)=(\Im Y,\Im Z)$ (§17)。再者,所有按 Bessel 函数或 Hermite 多项式, Laguerre 多项式, Legendre 多项式等展开的古典定理无不包括于定理 14.2 之中,这方面可参考注 1 所附文献。

L_t 在 $t=\infty$ (或 $t=-\infty$) 为极限圆型的情形:如果 $\Im(\lambda_0)\neq0$,则当 β 在实軸上变动时, $l_b(\lambda_0,\beta)$ 所画出的圆 $C_b(\lambda_0)$ 的周具有中心

$$-W(x_1(b,\lambda_0),\overline{x_2(b,\lambda_0)})/W(x_2(b,\lambda_0),\overline{x_2(b,\lambda_0)}),$$

和半徑 (§63)

$$\Big(2|\Im(\lambda_0)|\int_0^b|x_2(t,\lambda_0)|^2dt\Big)^{-1},$$

它們在 $\Im(\lambda_0)\neq0$ 的范圍是 λ_0 的連續函数,且当 b 增至 b' 时

$C_{b'}(\lambda_0)\subseteqq C_b(\lambda_0)$ ((64.3))。因此于 $\mathfrak{J}(\lambda)\neq 0$ 正則的函数系 $\{l_b(\lambda)\}_{b>0}$ 在 λ 平面中与实軸不交的任意有界閉域 G 上是一致有界的。如果 G 的边界曲綫 ∂G 为有长曲綫的話，則由 Cauchy 积分公式有

$$l_b(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{1}{\nu-\lambda}l_b(\nu)\,d\nu,$$

因此当 λ_1 与 λ_2 在含于 G 内部的閉域 G_1 上变动时，有

$$|l_b(\lambda_1)-l_b(\lambda_2)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\text{常数}\cdot\int_{\partial G}\left|\frac{1}{\nu-\lambda_1}-\frac{1}{\nu-\lambda_2}\right||d\nu|,$$

而 $\{l_b(\lambda)\}_{b>0}$ 成为在 G_1 上等度連續函数族，从而应用定理 6.5 便可选出在 λ 平面的任意有界閉域上皆一致收斂的子函数列 $\{l_{b_n}(\lambda)\}$ $(b_n\uparrow\infty)$。于是只須令 $m_2(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}l_{b_n}(\lambda)$ 好了。同样也可以定义 $m_1(\lambda)$。

例　对于 $x''+\lambda x=0$, $-1<t<1$, 因为 $x_1(t,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,t$, $x_2(t,\lambda)=\sqrt{\lambda}^{-1}\sin\sqrt{\lambda}\,t$, 所以，例如令 $\alpha=\beta=0$ 便得

$$m_1(\lambda)=\lim_{a\downarrow -1}l_a(\lambda,0)=\lim_{a\downarrow -1}\frac{-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,a}{\sin\sqrt{\lambda}\,a}$$

$$=\sqrt{\lambda}\,\frac{\cos\sqrt{\lambda}}{\sin\sqrt{\lambda}},$$

$$m_2(\lambda)=\lim_{b\uparrow 1}l_b(\lambda,0)=\lim_{b\uparrow 1}\frac{-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,b}{\sin\sqrt{\lambda}\,b}$$

$$=-m_1(\lambda),$$

于是，由于 $-(m_1(\lambda)-m_2(\lambda))^{-1}$, $-m_1(\lambda)m_2(\lambda)/(m_1(\lambda)-m_2(\lambda))$ 的殘数分别为

$$1\ (\text{在}\ \sqrt{u}=(2n+1)\pi/2\ \text{处，但}\ n=0,1,2,\cdots),$$

$$(n\pi)^2\ (\text{在}\ \sqrt{u}=n\pi\ \text{处，但}\ n=1,2,\cdots),$$

故 $\rho_{11}(u)$ 成为只在 $(2n+1)\pi$ 处增加 1 的单調增加阶梯函数，$\rho_{22}(u)$ 成为只在 $n\pi$ 增加 $(n\pi)^2$ 的单調增加阶梯函数，而且还知道 $\rho_{12}(u)$

$=\rho_{21}(u)$ 为常数。于是 (65.7) 变成：对于 $Y, Z\in L_2(-1, 1)$，Parseval 等式

$$\int_{-1}^{1} Y(t)\overline{Z(t)}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} Y(s)\cos\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}s\right\}ds$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\overline{Z(t)}\cos\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}t\right\}dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1} Y(s)\sin(n\pi s)\,ds\cdot\int_{-1}^{1}\overline{Z(t)}\sin(n\pi t)\,dt$$

成立。同样，取对应于各种 α, β 值的边值的周期为 2 的三角函数，并按它們作 Fourier 式展开，也可得到相应的 Parseval 等式。至于有关极限圓型的其他的例可参見注 1 所引文献。

后　　記

首先从起草本书时所参考的各书中举出和泛函分析有着一般联系的几种。

1. S. Banach: Théorie des opérations linéaires (Warszawa, 1932).

2. E. Hille: Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. (New York, 1948). (有 E. Hille 和 R. S. Phillips 合著的 1957 年版)

3. L. A. Ljusternik-W. I. Soboleff: Elemente der Funktionalanalysis (Akademie Verlag, Berlin, 1955). (有俄文,中文本)

4. B. Sz. Nagy: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes (Julius Springer, Berlin, 1942).

5. J. von Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Berlin, 1932).

6. F. Riesz-B. Sz. Nagy: Leçons d'analyse fonctionnelle (Akadémiai Kiado, Budapest, 1953). (有英文,德文本)

7. M. H. Stone: Linear transformations in Hilbert space, Amer. Math. Soc. (New York, 1932).

8. 吉田耕作: 位相解析 I (岩波, 1950)。

9. A. C. Zaanen: Linear analysis (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1953).

这里面 4, 5, 7 只討論 Hilbert 空間,又 3, 9 只討論有界算子 (9 中有很多习题,对初学的很适宜)。

1, 5, 7 的出版均在 1932 年,这个事实說明現代的泛函分析大致是在 1930 年前后系統地被研究的。在这些书中所展开的一般理論自从第二次世界大战結束以来特別有效地应用在偏微分方程的研究上,以 Courant, Friedrich 为中心的紐約学派, 以 L. Schwartz, J. Leray 为中心的法国学派, L. Gårding, L. Hörmander 的瑞典学派等的活跃是惊人的。本想介紹他們的一端使讀者得以窺見一般理論的作用,但在本丛书南雲道夫,岩村联,加藤敏夫等人的书籍中諒各有更为精采的介紹。

为了更有利于理解正文，虽曾打算列入稍多的例子和附注，无奈限于篇幅，有做得很不够的，也有原来預定了的項目在正文中无从加以論述的，玆将其中主要的附記于下。

如在§9所述，通过 Dirichlet 式范数的再生核，Dirichlet 問題或 Neumann 問題即可解决，可是这再生核可如(12.1)那样通过关于 Dirichlet 式范数的正交系来表示。利用这一事实而作 Green 函数或 Neumann 函数的話，Dirichlet 問題或 Neumann 問題便可得解。关于这一点可参閱在第2章(35頁)所引的 S. Bergman 的书。

遍历理論虽然是为奠定統計力学的基础而产生的，但在把統計力学的想法引入"信息或控制的理論"的 N. Wiener 的《控制論》或 Shannon 的《信息論》中，遍历理論却起着基本的作用。这是因为，由于所謂"将来的时間平均等于过去的时間平均"以及所謂"遍历地看来时間平均等于相空間平均"，根据过去的資料就可以預测将来的原故。关于这方面，可参閱 Wiener 的书。(中譯本：控制論，郝季仁譯，科学出版社，1960。)

有关半群的迄至1954年的文献可参閱 K. Yosida: Semi-group theory and the integration problem of diffusion equations, Proc. Int. Cong. of Math. 1954, vol. 1, 1～16。又自1954年以后特别在 Марков 过程方面的应用在本丛书伊藤清《随机过程》一书中詳有所論述。

关于积分方程虽然只能限于讲述 Fredholm 理論的一般化，但 Volterra 型或 Fredholm 型的特异积分方程在应用上也很重要。这方面可参閱例如 N. Wiener: Fourier transform in complex domain, New York (1934), p. 49, 或 N. I. Muskhelishvili: Singular integral equations, Groningen (1953)。关于 Wiener-Hopf 对前者的研究，本丛书河田龍夫《富里埃变换与拉普拉斯变换》一书中大概会涉及。又后者和彈性論中苏联学派的研究有着密切联系。

遺憾的是沒有余裕将一般展开定理14.2的証明进行到底，并説明由該定理統一地导出按古典特殊函数的展开定理的情况，只好請讀者参照正文中所举的一些文献了。再者在正文所述关于二阶綫性常微分算子的一般展开定理之外，关于椭圓型偏微分算子的一般展开定理也正在通过 E. Titchmarsh, F. I. Mautner, L. Gårding, F. E. Browder, S. Îto, J. Schwartz 等人按各自的方法形成起来，由此，譜分解的具体例子当然也就会漸次被提供出来：

Mautner: On eigenfunction expansions, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.

30 (1953), 49～53.

F. Browder: Eigenfunction expansions for formally self-adjoint partially differential operators, I, 同上 42(1956), 769～771; II, 870～872.

L. Gårding: Applications of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators, Univ. of Maryland (1954).

S. Îto: 数学,第7卷 (1955), 第3号。

再者在正文中无法涉及非線性算子,在最近的量子場論上象 Fréchet 微分之类的与非線性分析有关的泛函导数的概念日益显得重要起来。好在开头所引文献中 2 和 3 都有涉及 Fréchet 微分的部分,讀者不妨参照。

校后記

夏道行

泛函分析是一門很新的数学分支，它是在本世紀30年代才初步形成的。40年代以来泛函分析发展的情况証明了它是一門应用很广、生气勃勃的新兴学科。泛函分析已經成为近代数学許多分支的重要工具。例如微分方程理論，积分方程論，概率論，計算数学，函数論，群表示論，微分流形理論等都越来越多地引用着泛函分析的观点和方法。作为数学方法，它在量子場論和連續介质力学中应用的前景也是非常吸引人的。最近发表的一些著作(如[20]，[21])中指出，泛函分析将进一步应用到控制論，核反应理論，輸送理論等方面。

泛函分析，作为近代数学分析的一个分支，不仅吸取了古典数学分析的許多重要方法，如积分論，富里埃分析和复变函数論，而且綜合了几何的和代数的观点和方法。更重要的是由于泛函分析在各个方面的应用，接受了各方面的影响，因而提炼出了新的、丰富的分析方法。所以泛函分析本身也在它的内部出現了許多嶄新的分支。現今要在一本书中較全面地闡述泛函分析的各个基本理論的要点以及列举一些重要的应用将是相当难做到的事，因此不能对本书提出这种要求。

这本书能以很短的篇幅，介紹了泛函分析的一些基本方法以及它們在微分方程，概率論和量子力学等方面的某些应用，并且还涉及了几个較深入的問題，是一本难得的书。本书处处注意到联系应用(特别是对微分方程的)，这是一个特色。

这本书可以作为綜合大学数学专业泛函分析基础課参考书或泛函分析专門組教学用书，并且特别适宜于作为在微分方程方面专門組的同学学习泛函分析的用书。对于在概率論方面的讀者来説，本书的第 6，8，9，11，12 等章可能很有用处。

下面就本书各章的具体內容作初步介紹。

在第 1 章中叙述了矢量空間，Hilbert 空間及其中算子的一些基本概念，为以后各章的基础。結合本书需要提出了在微分方程和量子力学中常用的几个具体空間及算子作为例。本章最后探討了完备化，指出完备化与广义函数概念之間的联系。为了理論上的需要，利用完备化的方法，添加"理想元素"，扩大被研究的数学系統是泛函分析的一个基本的方法。本章中所提及的利用 pre-Hilbert 空間完备化来引进广义函数方法也可參看 [11]。

第 2 章介紹了 Hilbert 空間中的正交投影定理和綫性泛函的表示定理——Riesz 定理。这是 Hilbert 空間的两个基本定理。本章(以及第 3 章)又用 Riesz 定理及正交系从泛函分析的观点处理了再生核的理論，并举出了复变函数論及椭圓型偏微分方程論中的 Bergman 核(起源于正交函数項級数)和其他有关的核作为例，这些材料在别的一般泛函分析书中还不多見。利用正交投影方法来处理复变函数論及方程中的問題的著作还有很多，如 [16] 及 [19，a 中第 4 篇]。

作为正交函数系概念的推广，在第 3 章中考慮了就范正交系以及它与再生核的关系。利用完备的就范正交系可以引进空間的維数，这方面本书中略去了，可以参考 [15]。

第 4 章和稍后的第 7 章介紹了椭圓型偏微分方程理論中常用的一些 Hilbert 空間的分析方法。如利用双綫性泛函决定算子的 Milgram-Lax 定理，关于椭圓型方程弱解的正則性的 Weyl-Schwartz 定理和 Gårding 的利用双綫性泛函解 Dirichlet 問題

的方法等。但泛函分析在偏微分方程的应用方面的文献是十分丰富的，系統的工作也有好几套，后面将举出一些([7]，[11]，[19])备讀者进一步的參考。

第5章研究 Banach 空間上的可加連續泛函，主要內容有 Hahn-Banach 定理，共軛空間及共軛算子的概念。但对許多具体空間上可加綫性泛函的表示，由于篇幅的限制，介紹得不多，例如对 L_p 空間及一般緊集上的連續函数全体所成空間上的可加連續泛函的表示都未提到，讀者可參考 [1]～[5]，[8]。

第6章除介紹了 Banach 空間上算子的另一个基本定理——共鳴定理外，主要的篇幅是关于遍历理論的。这个来源于統計力学，天体力学及其他力学的理論，由于引用了測度論及泛函分析的方法已經发展成为数学的一个独立分支，在概率論，信息論，控制論以及其他許多分支中有重要的应用。

第8章与第9章是介紹算子半群及其在发展方程(如抛物型及双曲型)的柯西問題方面的应用。算子半群理論是本书的著者和 Hille 創立的。本书中只介紹了标准型的，这虽然不够广泛，但从方法上来說是有代表意义的，对初学的讀者来說容易通过它掌握半群方法的特点。至于一般情況以及在馬尔柯夫过程中的应用，在 Hille 与 Phillips 的专书 [14] 中也未尽能介紹。后面开列的文献 [18a] 也許能提供一些綫索。又关于算子半群在偏微分方程方面的应用可以參考[18c]。最近发表的著作[7,III]，[18b]又指出需要考察綫性拓扑空間上的单参数算子半群。此外，关于算子半群的遍历理論和譜理論等可參看 [14]。

第10章介紹了具有基底的 Banach 空間上全連續算子的 Riesz-Schauder 理論。由于所考察的是具有基底的空間，使得讀者有可能較快地和較易地掌握这个理論。同时在应用时，在許多情況下，具有基底的 Banach 空間已經够用。假如讀者需要知道一

般的 Banach 空間上全連續算子的理論可參考 [1],[3]。

第 11 及 12 章主要是介紹 Hilbert 空間上算子譜分解理論。在本书中利用正定数列的表示导出酉算子的譜分解，利用 Cayley 变换导出(无界)自共軛算子的譜分解。这个方法接受起来可能比較容易。同时本书中也初步介紹了对称算子，这个概念还是应用較广的。并且又介紹了实对称算子及半有界对称算子的扩張。但对一般对称算子的扩張方法如亏指标的概念，Крейн 的理論，Наймарк 的广义譜系理論未能涉及。另外对单参数酉算子群的譜分解、正常算子的譜分解也未提及，对于准备从事泛函分析工作的讀者来說最好补充一下，可参看 [9]，[10]。

第 13 及 14 章主要是初步介紹了綫性常微分算子的譜分解理論，著者自己也說由于篇幅限制未能詳細介紹，但是在本书中所介紹的对讀者仍将是很有益的东西。关于这方面，除了著者所开的参考文献外，可参考 [13]。

在本书中沒有提到在方程及計算数学中应用較多的近似方法及不动点原理，这可能是一个缺点，讀者可参看 [1]，[2]，[8]。

正如一开始所說的，本书很难把泛函分析各分支的基本理論都提到，作为进一步学习泛函分析的专門文献所必須掌握的基本知識来說，可能还需要知道綫性拓扑空間的基本概念[7][8]，賦范环的基本概念[1][12]，群上的調和分析初步[12][17]，半序綫性空間上的泛函分析初步[1][6]及非綫性泛函分析的一些基本結果[1][8]等等。

参考文献

[1] 关肇直編：泛函分析讲义，高等教育出版社，1958。
[2] 李文清：泛函分析，科学出版社。
[3] 复旦大学数学系編：泛函分析，上海科学技术出版社，1960。
南京大学数学天文学系編：泛函分析，人民教育出版社，1961。
[4] Л. А. Люстерник, В. А. Соболев：泛函数分析概要，杨从仁譯，科学

出版社，1955。

[5] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин: 函数論与泛函分析初步，董延闓譯，高等教育出版社。

[6] Л. В. Конторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер: 半序空間泛函分析，何記勤譯，人民教育出版社。

[7] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов: I. Обобщенные функции.
II. Пространства основных и обобщенных функций, 1958.
III. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1958.

[8] Л. В. Конторович и Г. П. Акилов: Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

[9] F. Riesz, B. Sz-Nagy: Lecture on functional analysis (有法文本，俄文本)。

[10] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман: Теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.

[11] С. Л. Соболев: 泛函分析在数学物理中的应用，王柔怀等譯，科学出版社，1959。

[12] М. А. Наймарк: Нормированные кольца.

[13] М. А. Наймарк: Линейные дифференциальные операторы.

[14] E. Hille, R. S. Phillips: Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. XXXI, 1957.

[15] J. Von Neumann: Functional operators II, Ann. Math. Studies, N. 22, 1950.

[16] M. Schiffer, D. C. Spencer: Functionals of finite Riemann surfaces, 1954.

[17] L. Loomis: An introduction to abstract harmonic analysis, 1953 (有俄譯本)。

[18]a. Е. Б. Дынкин: Бесконечно малые операторы Марковских случайных процессов, ДАН, 105, 206～209, 1955.
Е. Б. Дынкин: Инфинитезимальные операторы Марковских процессов, Теор. верон. и ее прим., 1:1, 25～37, 1956.
W. Feller: The general diffusion operator and positivity preser-

ving semigroups in one dimension, Ann. Math., 60:3, 417～436, 1954.

W. Feller: On second order differential operators, Ann. Math., 61:1, 90～105, 1954.

W. Feller: On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, Ann. Math., 65:3, 527～570, 1957.

W. Feller: Generalized second order differential operators and their lateral conditions, Illinois, Jour. Math., 1:4, 459～504, 1957.

W. Feller: On the intrinsic form for second order differential operators, Illinois, Jour. Math., 2:1, 1～18, 1958.

Jorgens: Comm. Pure Appl. Math., 11, 1959.

b. P. D. Lax: A Phragman Lindelöf theorem of harmonic analysis and its applications to some questions in the theory of elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math., 10, 361～389, 1957.

c. R. S. Phillips: Dissipative hyperbolic systems, Trans, Amer. Math. Soc., 86, 109～173, 1957.

R. S. Phillips: Dissipative operators, Comm. Pure Appl. Math., 12, 249～276, 1959.

R. S. Phillips: Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 90, 193～254, 1959.

[19] 关于泛函分析在微分方程中的应用

a. 介紹性的文章，或附有詳細参考文献的：

И. М. Гельфанд: О некоторых проблемах функцонального анализа, УМН 11, вып. 6, 3～12, 1956.

И. М. Гельфанд: Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений, УМН 14, вып. 3, 3～20, 1959.

И. М. Гельфанд: Об эллиптических уравнениях, УМН 15, вып. 3, 1960.

М. И. Вишик, А. Ладыженская: Краевые задачи для уравнений в частных производных в некоторых классов операторных

уравнений, УМН 11, вып. 6, 41～97, 1956.

С. Л. Соболев: 关于泛函分析在微分方程中的应用的某些苏联工作，数学进展，三卷四期，1957。

С. Л. Соболев, М. И. Вишик: 偏微分方程論中的若干泛函方法(在全苏第三次数学学会上的报告)。

L. Gårding: Some tends and problems in linear partial differential equations, УМН 15, вып. 1, 137～153, 1960.

b. 偏微分算子的理論及与广义函数論有关的工作:

М. И. Вишик: Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды Моск. Матем. Об-ва, 1, 187～246, 1952.

М. И. Вишик: О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. Сб. 29, 615～676, 1951.

Г. Е. Шилов: Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффицинтами, УМН 14, вып. 5, 3～44, 1959.

М. С. Агранович: Об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами, УМН 16, вып. 2, 27～93, 1961.

L. Hörmander: On the theory of general differential operators, Acta Math., 94, 161～248, 1955 (有俄文单行本)。

L. Hörmander: Local and global properties of fundamental solutions, Math. Scand., 5, No. 1, 27～40, 1957.

L. Hörmander: On the regularity of the solutions of boundary problems, Acta Math., 97, No. 3～4, 225～264, 1958.

L. Hörmander: On the interior regularity of the solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 11, No. 2, 197～218, 1958.

L. Hörmander: Differentiability properties of solutions of systems of differential equations, Arkiv för Math., 3, No. 6, 527～535, 1958.

L. Hörmander: Differential operators of principle type, Math. Ann., 140, No. 2, 142～146, 1960.

F. E. Browder: Functional analysis and partial differential equations, 1, Math. Ann., 138, 55~79, 1959.

L. Gårding: Cauchy's problem for hyperbolic equations, Univ. of Chicago, 1957.

J. Leray: Hyperbolic equations, Institute for advanced study note, Princeton, 1954.

J. L. Lions: Problémes aux limites en théorie des distributions, Acta Math., 94, 13~153, 1955.

J. L. Lions: Sur-les problèms aux limites des type dérivee oblique, Ann. Math., 64, 207~249, 1956.

M. Schechter: General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 12, 457~486, 1959.

F. Treves: Relations de domination entre operatours differentials, Acta Math., 101, No. 1~2, 1~139, 1959.

F. Treves: Operatours differentials hyppoelliltiques, Ann. Inst. Fourier, 9, 2~74, 1959.

e. 其他

A. A. Девяк: Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах, УМН 14, вып. 3, 21~73, 1959.

A. И. Кошелев: Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и сестем, УМН 13, вып. 4,29~89,1958.

C. M. Никольский: О теоремах вложения продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных, УМН 16, вып. 5, 63~114, 1961.

K. O. Friedrichs: Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 11, 333~418, 1958.

[20] C. L. Dolph: Recent devalopments in some non-selfadjoint problems of mathematical physics, Bull. Amer. Math. Soc., 67, 1, 1~69, 1961.

[21] N. Wiener: Nonlinear problems in random theory, MIT, 1958.